TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 3

Abgabe bis zum 11. Mai um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1*

2+2 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung Ihrer Antwort mit an.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige partielle Funktion. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Funktion $g : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n) = \mathrm{const}_1^1(f(n))$ an (wobei $\mathrm{const}_1^1(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

(b) Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Funktion, welche durch Rekursion aus $\mathrm{const}_1 : \mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$ und $\ell : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mathrm{const}_1() = 1$ und $\ell(n, m) = 2m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ hervorgeht. Weiter sei $g(n, m) = n \dot{-} f(m)$. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Funktion search_g an.

Aufgabe 2

Welche Funktion berechnet die folgende Turingmaschine M?

$$M = \big(\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\}\big) \quad \text{mit}$$

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, 0, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_3, 0, L)$
z_1	$(z_1, 0, R)$	$(z_1, 1, R)$	$(z_2, \square, L)$
z_2	$(z_2, 1, L)$	$(z_3, 0, L)$	$(z_e, 0, N)$
z_3	$(z_3, 0, L)$	$(z_3, 1, L)$	$(z_e, \square, R)$
z_e	$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_e, \square, N)$

Aufgabe 3*

3+4 Punkte

Geben Sie jeweils eine Turingmaschine über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an (formal als Tupel, vgl. Aufgabe 2), die

(a) bei Eingabe eines nicht-leeren Wortes $w \in \Sigma^+$ prüft, ob w eine Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl ist (u.U. mit führenden Nullen), im positiven Fall 1 ausgibt und andernfalls 0. Bei Eingabe von ε soll die Maschine (ohne Forderungen an die Ausgabe) terminieren.

(b) bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ das Wort w^{R} berechnet, d.h., die die Reihenfolge der Buchstaben in w umkehrt.

Aufgabe 4*

4 Punkte

Das Band einer Turingmaschine ist laut Vorlesung in beide Richtungen unbeschränkt. Wir betrachten ein alternatives Modell, in dem das Band nur nach rechts unbeschränkt ist. Eine *einseitig beschränkte Turingmaschine* ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \#, E)$, wobei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine ist mit

- $\# \in \Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\square\})$
  (# markiert das linke Ende des Bandes),
- $\delta(z, \#) \in Z \times \{\#\} \times \{R\}$ für alle $z \in Z$
  (Befindet sich der Kopf von M am linken Rand des Bandes, so muss sich dieser als nächstes nach rechts bewegen ohne den Inhalt des Bandes zu verändern) und
- $\delta(z, a) \in Z \times (\Gamma \setminus \{\#\}) \times \{L, N, R\}$ für alle $z \in Z$, $a \in \Gamma \setminus \{\#\}$
  (Die Markierung # wird nie an eine andere Stelle als den linken Rand geschrieben).

Eine einseitig beschränkte Turingmaschine M berechnet die partielle Funktion $f_M : \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ mit

$$f_M(v) = w \quad \longleftrightarrow \quad \exists z \in E, i \in \mathbb{N}\colon \#z_0v \vdash_M^* \#zw\square^i \text{ und } \#zw\square^i \text{ ist Haltekonfiguration.}$$

Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion f durch eine einseitig beschränkte Turingmaschine berechenbar ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten einer einseitig beschränkten Turingmaschine für f beschreiben, ohne diese explizit als Tupel anzugeben.