TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 4

Abgabe bis zum 25. Mai um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1*

1+4+1 Punkte

Bearbeiten Sie in Anlehnung an Lemma 6.20 die folgenden Teilaufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\big(\mathrm{bin}(2)\#\mathrm{bin}(0)\big)_5$.

Hinweis. Es gilt $(\mathrm{bin}(0))_5 = 2$, $(\mathrm{bin}(1))_5 = 1$ und $(\#)_5 = 3$.

(b) Geben Sie ein GOTO-Programm P an, welches die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(n_1, n_2) = \big(\mathrm{bin}(n_1)\#\mathrm{bin}(n_2)\big)_5$$

berechnet (vgl. Folie 6.22).

Hinweis. Sie dürfen Anweisungen der Form $x_i := x_j \cdot c$, $x_i := x_j \cdot x_k$, etc. verwenden.

(c) Berechnen Sie die eindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\big(\mathrm{bin}(n)\big)_5 = 306$.

(d) (Aufgabenteil wird nicht bewertet) Geben Sie ein GOTO-Programm P' an, welches eine Funktion $f' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft berechnet: Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{bin}(m))_5 = n$, so ist $\big(\mathrm{bin}(f'(n))\big)_5 = n$ (andernfalls wird keine Forderung an f' gestellt), d.h., P' berechnet (falls möglich) bei Eingabe von $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, für welche n die Kodierung der Binärdarstellung von m zur Basis 5 ist; gibt es keine solche Zahl m wird nur gefordert, dass P' terminiert.

Bemerkung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\big(\mathrm{bin}(m)\big)_5 = n$.

Aufgabe 2*

4 Punkte

Gegeben sei ein PDAE $P = (Z, \Sigma, \Gamma, \iota, \delta, \#, E)$. Geben Sie eine Turing Maschine M_P an, welche die charakteristische Funktion der von P akzeptierten Sprache $L(P)$ berechnet. Es genügt, wenn Sie die Funktionsweise Ihrer Maschine beschreiben, ohne diese explizit als Tupel anzugeben. Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht nachweisen.

Hinweis. Beachten Sie, dass PDAEs im Gegensatz zu Turing Maschinen nichtdeterministisch arbeiten.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ keine Reduktion des speziellen Halteproblems K auf die Sprache $\{0,1\}$ ist:

$$f(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in K \\ 0, & \text{falls } w \notin K \end{cases}.$$

<u>Aufgabe 4</u>* $\boxed{\text{1+1+1+2 Punkte}}$

Sei Σ ein Alphabet mit $\{0,1\} \subseteq \Sigma$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Reduzierbarkeitsbeziehung $\leq$ ist reflexiv und transitiv.

(b) Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei entscheidbare Probleme mit $\emptyset \neq B \neq \Sigma^*$. Dann gilt $A \leq B$.

(c) Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $A \leq B$. Dann gilt auch $\Sigma^* \setminus A \leq \Sigma^* \setminus B$.

(d) Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $C = \{0\}A \cup \{1\}B$. Dann gilt:

 (i) $A, B \leq C$ und

 (ii) $C \leq D$ für alle $D \subseteq \Sigma^*$ mit $A, B \leq D$.

<u>Aufgabe 5</u>

Seien Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache und $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ eine totale und berechenbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie.

(a) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{f(w) : w \in L\}$ entscheidbar.

(b) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{f(w) : w \in L\}$ semi-entscheidbar.

(c) Wenn L semi-entscheidbar ist, so ist $\{f(w) : w \in L\}$ semi-entscheidbar.

(d) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{w \in \Sigma^* : f(w) \in L\}$ entscheidbar.

(e) Wenn L semi-entscheidbar ist, so ist $\{w \in \Sigma^* : f(w) \in L\}$ semi-entscheidbar.