TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 5

Abgabe bis zum 08. Juni um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1* 3 Punkte

Wir betrachten die Sprache

$$L_{42} = \{\ w\#x : w \in L_{\mathrm{TM}}, x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ besucht den Zustand } z_{42}\ \}.$$

Zeigen Sie, dass L_{42} unentscheidbar ist, indem Sie das allgemeinen Halteproblems auf L_{42} reduzieren.

Hinweis. Konstruieren Sie zu der Turingmaschine M_w eine Turingmaschine $M_{w'}$, in welcher der Zustand z_{42} nur für bestimmte Eingaben besucht wird.

Aufgabe 2* 6 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind.

(a) $L_a = \{w \in L_{TM} : M_w$ akzeptiert keine Eingabe$\}$

(b) $L_b = \{w \in L_{TM} : M_w$ hat mehr als drei Zustände$\}$

(c) $L_c = \{w \in L_{TM} : M_w$ berechnet die Funktion f von Folie 7.25$\}$

(d) $L_d = \{w \in L_{TM} : M_w$ berechnet die charakteristische Funktion des Halteproblems$\}$

Hinweis. Falls Sprache L_x entscheidbar ist, beschreiben Sie eine Turingmaschine, die diese entscheidet. Ansonsten können Sie den Satz von Rice verwenden, um die Unentscheidbarkeit zu zeigen, d.h. spezifizieren Sie $\mathcal{S}$, zeigen Sie $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$ und zeigen Sie $C(\mathcal{S}) = L_x$.

Aufgabe 3* 6 Punkte

Überprüfen Sie, ob die Klasse der entscheidbaren Sprachen und die Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen jeweils abgeschlossen sind unter

(a) Vereinigung.

(b) Schnitt.

(c) Komplementierung.

(d) Konkatenation.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache D der Namen von Turingmaschinen, deren Definitionsbereich nicht leer ist, d.h.,

$$D = \{\ w \in L_{\mathrm{TM}} :\ \text{es existiert } x \in \{0,1\}^*\ M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\ \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass D semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie per Reduktion von einem geeigneten Problem, dass D unentscheidbar ist.

(c) Was folgt daraus für die Sprache $\overline{D} = \{0,1\}^* \setminus D$?

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{E}$ die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$ und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $\{w \in L_{\mathrm{TM}} : L(M_w) \in \mathcal{K}\}$ unentscheidbar ist.