

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 6

Abgabe bis zum 22. Juni um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ genau dann semi-entscheidbar ist, wenn sie sich auf das allgemeine Halteproblem reduzieren lässt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen von Korrespondenzsystemen entscheidbar sind:

- Die Menge E der Korrespondenzprobleme über dem Alphabet $\{1\}$, die eine Lösung besitzen.
- Die Menge UPCP der Korrespondenzsysteme, die eine Lösung besitzen, in der jedes Paar höchstens ein Mal auftritt.

Zusatz. Was ist mit denjenigen Korrespondenzsystemen, die eine Lösung besitzen, in der höchstens ein Paar mehrfach vorkommt?

Aufgabe 3*

4 Punkte

Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

- Eingabe:** NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, I, \delta, F)$ mit $\# \in \Sigma$
Frage: Enthält $L(\mathcal{M})$ ein Wort der Form $w_1\#w_2\#\dots\#w_{2n-1}\#w_{2n}$
mit $w_i \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*$ f.a. i und $w_1w_3\cdots w_{2n-1} = w_2w_4\cdots w_{2n}$?

Hinweis. Reduzieren Sie PCP auf das angegebene Problem.

Aufgabe 4*

4 Punkte

Das *Palindromproblem*¹ für kontextfreie Sprachen ist wie folgt definiert:

- Eingabe:** kontextfreie Grammatik G
Frage: Enthält $L(G)$ ein Palindrom?

Zeigen Sie, dass das Palindromproblem für kontextfreie Sprachen unentscheidbar ist.

Hinweis. Reduzieren Sie PCP auf dieses Problem.

Aufgabe 5*

3 Punkte

Für eine ganze Zahl $m \geq 2$ bezeichne \equiv_m die Kongruenz modulo m auf der Menge der natürlichen Zahlen, d.h., für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \equiv_m b$ genau dann, wenn $b - a$ ein ganzzahliges Vielfaches von m ist. Zeigen Sie, dass die Theorie $\text{Th}(\mathbb{N}, +, (\equiv_m)_{m \geq 2})$ der natürlichen Zahlen mit Addition und Kongruenzen entscheidbar ist.

Hinweis. Reduzieren Sie $\text{Th}(\mathbb{N}, +, (\equiv_m)_{m \geq 2})$ auf $\text{Th}(\mathbb{N}, +)$; z.B. können Sie zu einer Formel φ , in welcher Relationen \equiv_m vorkommen, eine äquivalente Formel φ' konstruieren, welche ohne diese auskommt.

Zusatz. Überlegen sie sich, wo der Unterschied zu $\text{Th}(\mathbb{N}, +, |)$ liegt.

¹Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein *Palindrom*, falls $w = \varepsilon$ oder $w = a_1a_2\cdots a_l = a_l a_{l-1}\cdots a_1$ für $a_1, \dots, a_l \in \Sigma$ gilt.
<https://www.tu-ilmenau.de/al/lehre/sommersemester-2023/buk>