TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 7

Abgabe bis zum 06. Juli um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M eine Turingmaschine mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Eingaben $x \in L$ hält M nach höchstens $|x|^2$ vielen Schritten und gibt 1 aus.
- Für alle Eingaben $x \notin L$ hält M nach höchstens $2^{|x|}$ vielen Schritten und gibt 0 aus.

Gilt $L \in \mathsf{P}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2*

2+3 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in P sind. Gehen Sie dabei ähnlich wie im Beweis auf Folie 12.22 vor (und berücksichtigen Sie die Zeitkomplexität statt des Platzbedarfs).

(a) Sei DREIECK die Menge der ungerichteten Graphen, die ein Dreieck enthalten.

(b) Sei BIP die Menge der ungerichteten bipartiten[1] Graphen.

Aufgabe 3*

3 Punkte

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt eine Clique der Größe $k \in \mathbb{N}$, falls es paarweise verschiedene Knoten $v_1, \ldots, v_k \in V$ gibt, sodass $\{v_i, v_j\} \in E$ für alle $i \neq j$ aus $\{1, \ldots, k\}$ (d.h., falls G k paarweise benachbarte Knoten enthält).
Sei CLIQUE die Menge der Paare (G, k), sodass G ein ungerichteter Graph ist, der eine Clique der Größe $k \geq 0$ besitzt (der Parameter k sei dabei unär kodiert). Zeigen Sie, dass CLIQUE in NP ist.

Aufgabe 4

Sei INDSET die Menge der Paare (G, k), sodass G ein ungerichteter Graph ist, der $k \geq 0$ paarweise nicht benachbarte Knoten besitzt (der Parameter k sei dabei unär kodiert).
Zeigen Sie, dass CLIQUE $\leq_P$ INDSET und INDSET $\leq_P$ CLIQUE gilt.

Aufgabe 5*

2+3+2 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Begründen Sie, dass sowohl P als auch NP unter Vereinigung und Schnitt abgeschlossen sind.

Bemerkung. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Sprachen ist abgeschlossen unter Schnitt (bzw. Vereinigung), falls für je zwei Sprachen $L, K \in \mathcal{C}$ auch $L \cap K$ (bzw. $L \cup K$) wieder in $\mathcal{C}$ ist.

(b) Der Kleene-Stern-Operator ist wie folgt definiert: Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache, so ist

$$L^* = \{\, w_1 w_2 \ldots w_n : \ n \geq 1 \text{ und } w_i \in L \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \,\} \cup \{\varepsilon\}.$$

Begründen Sie, dass NP unter der Kleene-Stern-Operation abgeschlossen ist.

Bemerkung. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Sprachen ist abgeschlossen unter der Kleene-Stern-Operation, falls für jede Sprache $L \in \mathcal{C}$ auch L^* wieder in $\mathcal{C}$ ist.

(c) Begründen Sie, dass auch P unter der Kleene-Stern-Operation abgeschlossen ist.

[1]Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es disjunkte Mengen $A, B \subseteq V$ mit $A \cup B = V$ derart gibt, dass jede Kante zwischen einem Knoten aus A und einen Knoten aus B verläuft.

Aufgabe 6

Für eine Komplexitätsklasse K sei coK die Klasse der Sprachen, deren Komplement in K ist.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit P = coP.

(b) Erklären Sie, weshalb ein analoges Argument für NP und coNP fehlschlägt.

Anmerkung. Es ist im Übrigen nicht bekannt, ob NP = coNP gilt.

Aufgabe 7 (Selbststudium)

Das *beschränkte Post'sche Korrespondenz Problem* (kurz BPCP) ist wie folgt definiert:

Eingabe:	Ein Korrespondenzsystem $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^+ \times \Sigma^+$ und eine unär kodierte Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Frage:	Gibt es eine Lösung der Länge höchstens n?

Zeigen Sie, dass BPCP in NP ist.

Zusatz. Gilt auch BPCP ∈ NP, falls der Parameter n binär kodiert wird?

Aufgabe 8 (Selbststudium)

Sei 2MP die Menge der multivariaten Polynome $p(x_1, \ldots, x_k)$, die modulo 2 eine Nullstelle haben, d.h., für die es $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ gibt, mit $p(n_1, \ldots, n_k) \equiv 0 \bmod 2$. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass 2MP in NP ist.

(b) Zeigen Sie, dass SAT $\leq_P$ 2MP.

Aus (a) und (b) folgt, dass 2MP NP-vollständig ist.