Berechenbarkeit und Komplexität
11. Vorlesung

Prof. Dr. Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Sommersemester 2023

Kontextfreie Sprachen

Erinnerung

Wir kennen Algorithmen, mit denen die folgenden Probleme für deterministische endliche Automaten M und M' gelöst werden können:

1. Wortproblem: „$w \in L(M)$?“
2. Leerheitsproblem: „$L(M) = \varnothing$?“
3. Schnittproblem: „$L(M) \cap L(M') = \varnothing$?“
4. Inklusionsproblem: „$L(M) \subseteq L(M')$?“
5. Äquivalenzproblem: „$L(M) = L(M')$?“

Wort- und Leerheitsproblem haben wir auch für Kellerautomaten gelöst. Wir werden zeigen, daß u.a. die restlichen Probleme für Kellerautomaten nicht semi-entscheidbar (und damit nicht entscheidbar) sind.

dazu zeigen wir:

1. $\overline{\mathrm{PCP}} \leq \mathrm{Reg}_{\mathrm{PDA}}$
2. $\overline{\mathrm{PCP}} \leq \mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}} \leq \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}} \leq \mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Eq}_{\mathrm{PDA}}$
3. $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,PDA}}$
4. $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,PDA}}$

Zunächst daher eine Konstruktion, die Korrespondenzsysteme mit Kellerautomaten in Beziehung setzt.

Konstruktion

Sei $K = \big((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\big)$ Korrespondenzsystem über Σ. Setze

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Sigma \cup \{1, 2, \ldots, k, \$\}, \\
X_K &= \{i_n\, i_{n-1} \cdots i_1 \$ x_{i_1}\, x_{i_2} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq k\} \text{ und} \\
Y_K &= \{i_n\, i_{n-1} \cdots i_1 \$ y_{i_1}\, y_{i_2} \cdots y_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq k\}
\end{aligned}$$

Behauptung 1

Aus einem Korrespondenzsystem K können deterministische Kellerautomaten (=DPDA) P_X und P_Y berechnet werden mit $L(P_X) = X_K$ und $L(P_Y) = Y_K$.

Beweis: klar. □

Behauptung 2

Aus einem Korrespondenzsystem K kann ein Kellerautomat (=PDA) P_K berechnet werden mit $L(P_K) = \Gamma^* \setminus (X_K \cap Y_K)$.

Beweis:

1. Schritt: berechne DPDAs P_X und P_Y nach Behauptung 1
2. Schritt: berechne DPDAs P'_X und P'_Y mit $L(P'_X) = \Gamma^* \setminus X_K$ und $L(P'_Y) = \Gamma^* \setminus Y_K$ (vgl. AFS Folien 14.24 und 14.28)
3. Schritt: berechne PDA P_K mit $L(P_K) = L(P'_X) \cup L(P'_Y)$ $= \Gamma^* \setminus X_K \cup \Gamma^* \setminus Y_K = \Gamma^* \setminus (X_K \cap Y_K)$ (AFS Übung 6(2)) □

Jetzt bereiten wir den Zusammenhang zwischen Posts Korrespondenzproblem und unseren Problemen für kontextfreie Sprachen vor.

Behauptung 3

Sei K Korrespondenzsystem. Dann sind äquivalent:

1. K hat eine Lösung.
2. $X_K \cap Y_K \neq \varnothing$
3. $X_K \cap Y_K$ ist unendlich.
4. $X_K \cap Y_K$ ist nicht regulär.

Beweis:

„(1) ⇒ (3)“: Sei $i_1 i_2 \cdots i_n$ Lösung. Dann gilt $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$ und daher

$$(i_n\, i_{n-1} \cdots i_1)^\ell \$ (x_{i_1} x_{i_2}, \cdots x_{i_n})^\ell \in X_K \cap Y_K$$

für alle $\ell \geq 1$.

„(3) ⇒ (2)“ trivial

„(2) ⇒ (1)“ Ist $i_n\, i_{n-1} \cdots i_1 \$ w \in X_K \cap Y_K$, so hat K die Lösung $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

„(4) ⇒ (2)“ Da die leere Menge regulär ist, kann $X_K \cap Y_K$ nicht leer sein.

„(3) ⇒ (4)“ Sei $X_K \cap Y_K = \{u_i\$v_i \mid i \geq 1\}$ mit $u_i\$v_i \neq u_j\$v_j$ für alle $1 \leq i < j$ unendlich. Es gilt $u_i \neq u_j$ für alle $1 \leq i < j$.

Angenommen, $X_K \cap Y_K$ wäre regulär. Dann existiert ein DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, \delta, F)$ mit $L(M) = X_K \cap Y_K$.

Da Z endlich ist, existiert $z \in Z$, so daß die folgende Menge unendlich ist:

$$I = \left\{ i \geq 1 \mid \hat{\delta}(z_0, u_i) = z \right\}$$

Also existieren $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und $|v_i| < |u_j| \leq |v_j|$.

Es gilt

$$\hat{\delta}(z_0, u_i\$v_j) = \hat{\delta}\big(\hat{\delta}(z_0, u_i), \$v_j\big) = \hat{\delta}\big(\hat{\delta}(z_0, u_j), \$v_j\big) = \hat{\delta}(z_0, u_j\$v_j) \in F\,,$$

d.h. $u_i\$v_j \in X_K \cap Y_K$.

Also existiert k mit $u_i\$v_j = u_k\$v_k$, d.h. $u_i = u_k$ und $v_j = v_k$.

$u_i = u_k \Longrightarrow i = k \xRightarrow{v_j = v_k} v_j = v_i$, im Widerspruch zu $|v_i| < |v_j|$. $\square$

Satz

Das Regularitätsproblem für PDAs

$$\mathrm{Reg}_{\mathrm{PDA}} = \{P \mid P \text{ PDA mit } L(P) \text{ regulär}\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $\overline{\mathrm{PCP}} \le \mathrm{Reg}_{\mathrm{PDA}}$:

Die Abbildung $K \mapsto P_K$ mit $L(P_K) = \Gamma^* \setminus (X_K \cap Y_K)$ ist berechenbar (Behauptung 2). Es gilt

$$K \in \overline{\mathrm{PCP}} \overset{\textit{Beh. } 3}{\iff} X_K \cap Y_K \text{ regulär} \iff L(P_K) \text{ regulär}.$$

Also ist diese Abbildung eine Reduktion des nicht semi-entscheidbaren Problems $\overline{\mathrm{PCP}}$ auf $\mathrm{Reg}_{\mathrm{PDA}}$. □

Satz (Stearns 1967)

Das Regularitätsproblem für DPDAs

$$\mathrm{Reg}_{\mathrm{DPDA}} = \left\{P \;\middle|\; P \text{ DPDA mit } L(P) \text{ regulär}\right\}$$

ist entscheidbar.

ohne Beweis

Satz

Das Schnittproblem für DPDAs

$$\mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}} = \big\{(P_1, P_2) \;\big|\; P_1, P_2 \text{ DPDAs mit } L(P_1) \cap L(P_2) = \varnothing\big\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $\overline{\mathrm{PCP}} \leq \mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}}$: Die Abbildung, die jedem Korrespondenzsystem K das Paar (P_X, P_Y) von DPDAs nach Beh. 1 zuordnet, ist berechenbar. Nach Behauptung 3 gilt

$$K \in \mathrm{PCP} \iff L(P_X) \cap L(P_Y) \neq \varnothing$$

und damit

$$K \in \overline{\mathrm{PCP}} \iff L(P_X) \cap L(P_Y) = \varnothing\,.$$

Also ist diese Abbildung eine Reduktion des nicht semi-entscheidbaren Problems $\overline{\mathrm{PCP}}$ auf $\mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}}$. □

Korollar

Das Inklusionsproblem für DPDAs

$$\mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}} = \left\{(P_1, P_2) \,\middle|\, P_1, P_2 \text{ DPDAs mit } L(P_1) \subseteq L(P_2)\right\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $\mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}} \leq \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}}$:
Seien P_1 und P_2 zwei DPDAs. Dann kann DPDA P_2' berechnet werden mit $L(P_2') = \Sigma^* \setminus L(P_2)$. Es gilt

$$L(P_1) \cap L(P_2) = \varnothing \iff L(P_1) \subseteq L(P_2') \,.$$

Also ist die Abbildung $(P_1, P_2) \mapsto (P_1, P_2')$ eine Reduktion von $\mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}}$ auf $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}}$. □

Korollar

Das Universalitätsproblem für PDAs

$$\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} = \left\{ P \text{ PDA} \mid L(P) = \Sigma^* \right\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}} \leq \mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}}$:

Seien P_1 und P_2 DPDAs. Berechne DPDA P_1' mit $L(P_1') = \Sigma^* \setminus L(P_1)$. Berechne PDA P mit $L(P) = L(P_1') \cup L(P_2)$. Dann gilt

$$L(P_1) \subseteq L(P_2) \iff \Sigma^* \setminus L(P_1) \cup L(P_2) = \Sigma^* \iff L(P) = \Sigma^* .$$

Die Abbildung $(P_1, P_2) \mapsto P$ ist also eine Reduktion von $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}}$ auf $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}}$. □

Korollar

Das Äquivalenzproblem für PDAs

$$\mathrm{Eq}_{\mathrm{PDA}} = \Big\{ (P_1, P_2) \;\Big|\; P_1, P_2 \text{ PDAs mit } L(P_1) = L(P_2) \Big\}$$

ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis Wir zeigen $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Eq}_{\mathrm{PDA}}$:

Sei P' PDA mit $L(P') = \Sigma^*$. Dann ist Abbildung $P \mapsto (P, P')$ die gesuchte Reduktion. $\square$

Für DPDAs ist diese Frage entscheidbar (Senizergues 1997, vollständige Version 2001: 167 Seiten), sogar durch ein LOOP-Programm (Stirling 2002, Jančars vollständiger Beweis 28 Seiten von 2018). Insbesondere ist das Universalitätsproblem für DPDAs entscheidbar.

Korollar

Die folgenden Probleme sind nicht semi-entscheidbar:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,PDA}} &= \{(M,P) \mid M \text{ DFA, } P \text{ PDA mit } L(M) = L(P)\} \\ \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,PDA}} &= \{(M,P) \mid M \text{ DFA, } P \text{ PDA mit } L(M) \subseteq L(P)\} \end{aligned}$$

Beweis Wir zeigen $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,PDA}}$ und $\mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \leq \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,PDA}}$:

Sei M DFA mit $L(M) = \Sigma^*$. Dann ist Abbildung $P \mapsto (M,P)$ die gesuchte Reduktion, denn

$$L(P) = \Sigma^* \iff L(M) = L(P)$$

bzw.

$$L(P) = \Sigma^* \iff L(M) \subseteq L(P) .$$

□

Bemerkung

Das folgende Problem ist hingegen entscheidbar:

$$\mathrm{Inkl}_{\mathrm{PDA,DFA}} = \{(P, M) \mid P \text{ PDA}, M \text{ DFA mit } L(P) \subseteq L(M)\}$$

Beweis:
Berechne DFA M' mit $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.
Berechne PDA P' mit $L(P') = L(P) \cap L(M')$
Dann gilt

$$L(P) \subseteq L(M) \iff \varnothing = L(P) \setminus L(M) = L(P) \cap L(M') = L(P')\,.$$

Damit haben wir eine Reduktion von $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{PDA,DFA}}$ auf das entscheidbare Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen (vgl. AFS Folie 15.4). □

Bemerkung

Für DPDAs sind die Probleme von Folie 11.14 entscheidbar:

$$\begin{aligned}\mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,DPDA}} &= \big\{(M,P) \,\big|\, M \text{ DFA, } P \text{ DPDA mit } L(M) = L(P)\big\} \\ \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,DPDA}} &= \big\{(M,P) \,\big|\, M \text{ DFA, } P \text{ DPDA mit } L(M) \subseteq L(P)\big\}\end{aligned}$$

Beweis:
Sei P DPDA und M DFA.

Äquivalenz: Entscheidbarkeit folgt aus Senizergues' Ergebnis.

Inklusion:
1. Schritt: Berechne DPDA P_1 mit $L(P_1) = \Sigma^* \setminus L(P)$

2. Schritt: Berechne DPDA P_2 mit $L(P_2) = L(M) \cap L(P_1)$

3. Schritt: Teste, ob $L(P_2) = \varnothing$.

Es gilt $L(P_2) = L(M) \cap L(P_1) = L(M) \setminus L(P)$, also
$L(P_2) = \varnothing \iff L(M) \subseteq L(P)$. $\square$

Zusammenfassung zu kontextfreien Sprachen

1. $H_0 \le \mathrm{MPCP} \le \mathrm{PCP} \Longrightarrow \overline{\mathrm{PCP}}$ ist nicht semi-entscheidbar.

2. $\overline{\mathrm{PCP}} \le \mathrm{Reg}_{\mathrm{PDA}}$

   $$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PCP}} \le \mathrm{Schn}_{\mathrm{DPDA}} \le \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DPDA}} \le\ & \mathrm{Univ}_{\mathrm{DPDA}} \le \mathrm{Eq}_{\mathrm{PDA}} \\ & \mathrm{Univ}_{\mathrm{DPDA}} \le \mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,PDA}} \\ & \mathrm{Univ}_{\mathrm{PDA}} \le \mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,PDA}}\end{aligned}$$

   $\Longrightarrow$ Keines dieser Probleme ist auch nur semi-entscheidbar.

3. Die Probleme $\mathrm{Reg}_{\mathrm{DPDA}}$, $\mathrm{Eq}_{\mathrm{DPDA}}$, $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{PDA,DFA}}$, $\mathrm{Eq}_{\mathrm{DFA,DPDA}}$ und $\mathrm{Inkl}_{\mathrm{DFA,DPDA}}$ sind hingegen entscheidbar.

Zusammenfassung 11. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- sehr viele Probleme für kontextfreie Sprachen sind nicht einmal semi-entscheidbar (vgl. AFS Folien 15.12 und 15.14)

kommende Vorlesung

- Komplexitätstheorie: Einteilung der entscheidbaren Probleme danach, welche Ressourcen für ihre Lösung nötig sind.