TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Christopher Hugenroth, M.Sc. Sebastian Pfau
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 1

Abgabe: bis Freitag, der 19. April 2024, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 2+2 Punkte

Wir betrachten das folgende LOOP-Programm, das eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet.

$x_2 := 1;$
loop x_1 **do**
    $x_2 := x_1$
end;
$x_1 := x_1 \dot{-} 1;$
loop x_1 **do**
    $x_2 := x_2 \cdot x_1;$
    $x_1 := x_1 \dot{-} 1$
end;
$x_1 := x_2$

(a) Geben Sie $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$ an.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 2* — 2+2+2 Punkte

Geben Sie für die unten angegebenen Funktionen je ein LOOP-Programm an. Sie dürfen dabei auch die Programmkonstrukte von Folien 1.26 und 1.27 benutzen.

(a) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: n \mapsto n^2$

(b) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: n \mapsto n^n$ (wobei $f(0) = 1$ ist)

(c) $\mathrm{fib}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $\mathrm{fib}(0) = 0$, $\mathrm{fib}(1) = 1$ und $\mathrm{fib}(n+2) = \mathrm{fib}(n+1) + \mathrm{fib}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3* — 4+2 Punkte

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von LOOP-berechenbaren Funktionen $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass jedes f_k durch ein LOOP-Programm mit k LOOP-Schleifen berechnet werden kann, nicht aber durch ein Programm mit $k-1$ LOOP-Schleifen.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(k,n) = f_k(n)$ nicht LOOP-berechenbar ist.

(b) Folgt aus Aufgabenteil (a) direkt, dass die LOOP-Vermutung nicht stimmt? Begründen Sie.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Sei $\mathtt{MULT}$ ein rek-Programm, das die Funktion *mult* berechnet. Betrachten Sie das 1-stellige rek-Programm $F = \mathtt{REC}(\mathtt{CONST}_1^0, \mathtt{SUBST}(\mathtt{MULT}; \mathtt{SUBST}(\mathtt{ADD}; \mathtt{PROJ}_1^2, \mathtt{CONST}_1^2), \mathtt{PROJ}_2^2))$.

(a) Geben Sie $[\![F]\!](0)$, $[\![F]\!](1)$, $[\![F]\!](2)$ und $[\![F]\!](3)$ an.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Funktion $[\![F]\!] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 5

Geben Sie für die Funktionen g, h und fib aus Aufgabe 2 jeweils ein rek-Programm an F an, sodass $[\![F]\!]$ mit der jeweiligen Funktion übereinstimmt.

Aufgabe 6

Geben Sie einen Diagonalisierungsbeweis für den Satz von Cantor an, der wie folgt lautet:
Wenn f eine Funktion von einer Menge M in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist, dann ist f nicht surjektiv.