

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 2

Abgabe: bis Montag, der 04. Mai 2026, um 13:00 Uhr am Fachgebiet, vor der Übung oder handschriftlich auf moodle.

**Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.**

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden bei der Bewertung der Prüfung als Bonuspunkte berücksichtigt.

Aufgabe 1*

3 Punkte

Sei $a : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $a(k, n) := \text{ack}(k, n) \bmod 2$, d.h., $a(k, n)$ ist die Parität des Wertes der Ackermann-Funktion $\text{ack}(k, n)$.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Funktion a LOOP-berechenbar ist.

Aufgabe 2*

2 Punkte

Bestimmen Sie den Wert $f_P(3)$ (vgl. Vorlesung) für das folgende LOOP-Programm P .

```
1  $x_3 := x_2$ ;  
2  $x_1 := x_1 + 1$ ;  
3 loop  $x_1$  do  
4   |  $x_2 := x_2 + x_3$ ;  
5   |  $x_1 := x_1 + 1$   
6 end;  
7  $x_3 := 0$ 
```

Aufgabe 3*

4+2 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- (a) Sei P ein LOOP-Programm ohne LOOP-Schleifen und mit k Zeilen (d.h. P ist eine sequentielle Komposition von k Wertzuweisungen). Zeigen Sie per Induktion über k , dass $f_P(n) \leq 2^k \cdot (n + 1) - 1$ gilt.
- (b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass es kein LOOP-Programm ohne LOOP-Schleifen gibt, welches die Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: n \rightarrow n^2$ berechnet.

Aufgabe 4*

4 Punkte

LOOP-Programme mit Stack verfügen über alle Befehle, die LOOP-Programme besitzen. Zusätzlich besitzen sie einen Stack auf den mit dem Befehl $\text{push}(x_i)$ der Wert von x_i gelegt werden kann und von dem mit dem Befehl $x_i = \text{pop}$ der oberste Wert ausgelesen werden kann, welcher dann gleichzeitig vom Stack entfernt wird. Falls der Stack leer ist gibt pop den Wert 0 zurück.

Begründen Sie, dass für jede Funktion, die von einem LOOP-Programm mit Stack berechnet wird, ein LOOP-Programm (ohne Stack) existiert, welches die gleiche Funktion berechnet. Beschreiben Sie dazu, wie die Befehle $\text{push}(x_i)$ und $x_i = \text{pop}$ in einem LOOP-Programm ohne Stack umgesetzt werden können.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

WHILE-Programme mit Stack sind definiert wie LOOP-Programme mit Stack nur, dass jede LOOP-Schleife durch eine WHILE-Schleife ersetzt wird. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

- (a) Gibt es für jede Funktion, die von einem WHILE-Programm mit Stack berechnet wird ein WHILE-Programm (ohne Stack), welches die gleiche Funktion berechnet? Begründen Sie ihre Antwort.
- (b) Geben Sie ein WHILE-Programm mit Stack an, das die Ackermann-Funktion berechnet.