TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Sebastian Pfau
SS 2026

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 3

Abgabe: bis Freitag, der 15. Mai 2026, um 13:00 Uhr am Fachgebiet, vor der Übung oder handschriftlich auf moodle.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden bei der Bewertung der Prüfung als Bonuspunkte berücksichtigt.

Aufgabe 1* — 2 Punkte

Sei $f : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige partielle Funktion. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Funktion $g : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit $g = \mathrm{subst}(\mathrm{const}_1^1; f)$ an (wobei $\mathrm{const}_1^1(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 2* — 2+2 Punkte

Sei $\mathtt{MULT}$ ein μrek-Programm, welches die Funktion *mult* (vgl. Vorlesung 2.16) berechnet und sei $\mathtt{SUB}$ ein μrek-Programm, welches die Funktion *sub* (vgl. Vorlesung 2.18) berechnet. Betrachten Sie das 2-stellige μrek-Programm $F = \mathtt{SEARCH}(\mathtt{SUBST}(\mathtt{SUB}; \mathtt{PROJ}_1^3, \mathtt{SUBST}(\mathtt{MULT}; \mathtt{PROJ}_2^3, \mathtt{PROJ}_3^3)))$. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Berechnen Sie $[\![F]\!](0,0)$, $[\![F]\!](2,1)$, $[\![F]\!](2,3)$ und $[\![F]\!](3,0)$.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der partiellen Funktion $[\![F]\!] : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 3* — 2+1 Punkte

Gegeben sei das folgende GOTO-Programm, welches die partielle Funktion $f g\colon \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ berechnet:

1 **if** $x_1 = 0$ **then** 6;
2 **if** $x_2 = 0$ **then** 9;
3 $x_1 := x_1 \dot{-} 1$;
4 $x_2 := x_2 \dot{-} 1$;
5 **goto** 1;
6 **if** $x_2 = 0$ **then** 12;
7 $x_1 := 0$;
8 **goto** 14;
9 **if** $x_1 = 0$ **then** 12;
10 $x_1 := 0$;
11 **goto** 14;
12 $x_1 := 1$;
13 **goto** 14;

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Berechnen Sie $g(0,0)$, $g(1,0)$, $g(1,2)$ und $g(3,3)$.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von g an.

Aufgabe 4* $\boxed{\text{2+1 Punkte}}$

Gegeben sei die folgende Turingmaschine M, welche die partielle Funktion $h\colon \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ berechnet:

$$M = \big(\{z_0, z_1, z_e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\}\big) \quad \text{mit}$$

δ	0	1	$\square$
z_0	$(z_0, \square, R)$	$(z_1, \square, R)$	$(z_e, 0, N)$
z_1	$(z_0, \square, R)$	$(z_1, \square, R)$	$(z_e, 1, N)$
z_e	$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_e, \square, N)$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Berechnen Sie $h(0)$, $h(1)$, $h(4)$ und $h(14)$.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung von h an

Aufgabe 5* $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Sei Σ ein Alphabet mit $0, 1 \in \Sigma$ und sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Konstruieren Sie eine Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit $f_M : \Sigma^* \dashrightarrow \{0, 1\}$, $f_M(w) = 1$, falls $w \in L$ und $f_M(w) = 0$ sonst.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 6

Das Band einer Turingmaschine ist laut Vorlesung in beide Richtungen unbeschränkt. Wir betrachten ein alternatives Modell, in dem das Band nur nach rechts unbeschränkt ist. Eine *einseitig beschränkte Turingmaschine* ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \#, E)$, wobei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine ist mit

- $\# \in \Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\square\})$
  (# markiert das linke Ende des Bandes),
- $\delta(z, \#) \in Z \times \{\#\} \times \{R\}$ für alle $z \in Z$
  (Befindet sich der Kopf von M am linken Rand des Bandes, so muss sich dieser als nächstes nach rechts bewegen ohne den Inhalt des Bandes zu verändern) und
- $\delta(z, a) \in Z \times (\Gamma \setminus \{\#\}) \times \{L, N, R\}$ für alle $z \in Z$, $a \in \Gamma \setminus \{\#\}$
  (Die Markierung # wird nie an eine andere Stelle als den linken Rand geschrieben).

Eine einseitig beschränkte Turingmaschine M berechnet die partielle Funktion $f_M : \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ mit

$$f_M(v) = w \quad \longleftrightarrow \quad \exists z \in E, i \in \mathbb{N}\colon \#z_0 v \vdash_M^* \#zw\square^i \text{ und } \#zw\square^i \text{ ist Haltekonfiguration.}$$

Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion f durch eine einseitig beschränkte Turingmaschine berechenbar ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten einer einseitig beschränkten Turingmaschine für f beschreiben, ohne diese explizit als Tupel anzugeben.

Aufgabe 7

Zeigen sie, dass es zu jeder Turing-berechenbaren Funktion $f : \{0,1\}^* \dashrightarrow \{0,1\}^*$ eine Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt, mit $\Gamma = \{0, 1, \square\}$, die f berechnet.