

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 5

Abgabe: bis Freitag, der 12. Juni 2026, um 11:00 Uhr am Fachgebiet, vor der Übung oder handschriftlich auf moodle.

**Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.**

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden bei der Bewertung der Prüfung als Bonuspunkte berücksichtigt.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind.

- (a) $L_a = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ ist eine universelle Turing-Maschine}\}$
- (b) $L_b = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ hat genau einen Endzustand}\}$
- (c) $L_c = \{w \in L_{TM} : M_w \text{ berechnet die charakteristische Funktion von Posts Korrespondenzproblem}\}$

Hinweis. Falls Sprache L_x entscheidbar ist, beschreiben Sie eine Turingmaschine, die diese entscheidet. Ansonsten können Sie den Satz von Rice (Folie 8.6) verwenden, um die Unentscheidbarkeit zu zeigen, d.h. spezifizieren Sie S , zeigen Sie $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$, und zeigen Sie $C(S) = L_x$.

Aufgabe 2*

6 Punkte

Überprüfen Sie, ob die Klasse der entscheidbaren Sprachen und die Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen jeweils abgeschlossen sind unter der folgenden Operation:

- (a) Schnitt.
- (b) Vereinigung.
- (c) Komplementierung.
- (d) Konkatenation.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 3*

5 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen von Korrespondenzsystemen entscheidbar sind:

- (a) Die Menge PCP_{26} der Korrespondenzsysteme, die eine Lösung der Länge 26 besitzen.
- (b) Die Menge $UPCP$ der Korrespondenzsysteme über dem Alphabet $\{1\}$, die eine Lösung besitzen.
- (c) Die Menge $BPCP$ der Korrespondenzsysteme über dem Alphabet $\{0, 1\}$, die eine Lösung besitzen.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- (a) Für $a \in \mathbb{N}$ sei $\text{EVEN}(a)$ genau dann wahr, wenn a gerade ist. Zeigen Sie, dass die Theorie $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \text{EVEN})$ der natürlichen Zahlen mit Addition und dem unären Prädikat **EVEN** entscheidbar ist.

Hinweis. Reduzieren Sie $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \text{EVEN})$ auf $\text{Th}(\mathbb{N}, +)$; z.B. können Sie zu einer Formel φ , in welcher die Relation **EVEN** vorkommt, eine äquivalente Formel φ' konstruieren, welche ohne diese auskommt.

- (b) Für eine ganze Zahl $m \geq 2$ bezeichne das unäre Prädikat d_m die Teilbarkeit durch m auf der Menge der natürlichen Zahlen d.h., für $a \in \mathbb{N}$ gilt $d_m(a)$ genau dann, wenn a ein ganzzahliges Vielfaches von m ist. Zeigen sie, dass die Theorie $\text{Th}(\mathbb{N}, +, (d_m)_{m \geq 2})$ der natürlichen Zahlen mit Addition und Teilbarkeiten entscheidbar ist.
- (c) Es gilt $m \mid a$ genau dann wenn $d_m(a)$ gilt. Warum steht die Entscheidbarkeit von $\text{Th}(\mathbb{N}, +, (d_m)_{m \geq 2})$ dennoch nicht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $\text{Th}(\mathbb{N}, +, |)$?

Aufgabe 5

Wir betrachten die Sprache

$$L_{26} = \{ w \# x : w \in L_{\text{TM}}, x \in \{0, 1\}^* \text{ und } M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ besucht den Zustand } z_{26} \}.$$

Zeigen Sie, dass L_{26} unentscheidbar ist, indem Sie das allgemeine Halteproblems auf L_{26} reduzieren.