

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 7

Abgabe: bis Freitag, der 10. Juli 2026, um 11:00 Uhr am Fachgebiet, vor der Übung oder handschriftlich auf moodle.

**Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.**

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden bei der Bewertung der Prüfung als Bonuspunkte berücksichtigt.

Aufgabe 1*

2 Punkte

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und M eine Turingmaschine mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Eingaben $x \in L$ hält M nach höchstens $2^{|x|}$ vielen Schritten und gibt 1 aus.
- Für alle Eingaben $x \notin L$ hält M nach höchstens $|x|^2$ vielen Schritten und gibt 0 aus.

Gilt $L \in P$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2*

4 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- Zeigen Sie, dass sowohl P , als auch NP unter Vereinigung, Schnitt und Konkatenation abgeschlossen sind.
- Zeigen Sie, dass P unter Komplementierung abgeschlossen ist.
- Erklären Sie, warum ein Argument analog zu (b) für NP fehlschlägt.

Anmerkung. Für die Klasse $\text{coNP} := \{\Sigma^* \setminus L \mid L \in NP\}$ ist im Übrigen nicht bekannt, ob $NP = \text{coNP}$ gilt.

Aufgabe 3*

3+3+3 Punkte

Sei $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ ein Homomorphismus bezüglich der Konkatenation. Das heißt es gilt: $\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2)$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die φ -Sprache von L als $\varphi(L) = \{\varphi(w) \mid w \in L\} \subseteq \Gamma^*$. Zeigen Sie:

- Wenn L semi-entscheidbar ist, dann ist auch $\varphi(L)$ semi-entscheidbar.

Hinweis. Sie können die Folgerung von Folie 12.32 verwenden.

- Wenn L entscheidbar ist und φ ein *nicht-löschender* Homomorphismus ist, dann ist auch $\varphi(L)$ entscheidbar. Dabei heißt φ *nicht-löschend*, wenn $\varphi(w) \neq \varepsilon$ für alle $w \in \Sigma^+$.
- Es gibt eine entscheidbare Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und einen Homomorphismus φ , sodass $\varphi(L)$ nicht entscheidbar ist.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Polynomialzeit-Reduktions Relation $\leq_P$ transitiv ist.

Aufgabe 5

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt eine Clique der Größe $k \in \mathbb{N}$, falls es paarweise verschiedene Knoten $v_1, \dots, v_k \in V$ gibt, sodass $\{v_i, v_j\} \in E$ für alle $i \neq j$ aus $\{1, \dots, k\}$ (d.h., falls G k paarweise benachbarte Knoten enthält).

Sei CLIQUE die Menge der Paare (G, k) , sodass G ein ungerichteter Graph ist, der eine Clique der Größe $k \geq 0$ besitzt (der Parameter k sei dabei unär kodiert). Zeigen Sie, dass CLIQUE in NP ist.

Aufgabe 6

Sei INDSET die Menge der Paare (G, k) , sodass G ein ungerichteter Graph ist, der $k \geq 0$ paarweise nicht benachbarte Knoten besitzt (der Parameter k sei dabei unär kodiert).

Zeigen Sie, dass $\text{CLIQUE} \leq_P \text{INDSET}$ und $\text{INDSET} \leq_P \text{CLIQUE}$ gilt.