Berechenbarkeit und Komplexität
14. Vorlesung
NP-Vollständigkeit



Prof. Dr. Dietrich Kuske



FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Sommersemester 2026

Ziel dieser Vorlesung

Nicht nur SAT, sondern auch viele andere Probleme sind NP-vollständig, d.h. für jedes dieser Probleme A gilt:

Wer A „schnell“ lösen kann, der kann alle Probleme in NP „schnell“ lösen.

Weitere NP-vollständige Probleme

Wir betrachten nun folgende Reduktionen und weisen dadurch nach, daß alle diese Probleme NP-hart sind (sie sind auch in NP und damit NP-vollständig).

$$\text{SAT} \leq_P \text{3-SAT} \leq_P \text{3C und}$$
$$\text{3-SAT} \leq_P \text{DHC} \leq_P \text{HC} \leq_P \text{TSP}$$

- 3-SAT: Ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform mit ≤ 3 Literalen pro Klausel erfüllbar?
- 3C: Ist ein ungerichteter Graph drei-färbbar?
- DHC: Enthält ein gerichteter Graph einen Hamiltonkreis?
- HC: Enthält ein ungerichteter Graph einen Hamiltonkreis?
- TSP: Travelling Salesman Problem

3-SAT ist NP-vollständig

Ein Literal ist eine möglicherweise negierte atomare Formel, d.h. eine Formel der Form x_i oder $\neg x_i$. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, z.B. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

Erfüllbarkeitsproblem 3-SAT

EINGABE: eine aussagenlogische Formel φ in konjunktiver Normalform mit höchstens drei Literalen pro Klausel.

FRAGE: Hat φ eine erfüllende Belegung?

Definition 3-SAT

3-SAT ist die Menge der erfüllbaren aussagenlogischen Formeln in konjunktiver Normalform mit höchstens drei Literalen pro Klausel.

Beispiel: Die Formel $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_3$ ist in der geforderten Form und hat keine erfüllende Belegung. Das heißt $\varphi \notin$ 3-SAT.

Satz

Das Problem 3-SAT ist NP-vollständig.

Beweis:
Wie SAT ist auch 3-SAT in NP.
Für die NP-Härte reicht es, SAT $\leq_P$ 3-SAT zu zeigen (da SAT nach dem Satz von Cook-Levin NP-hart ist). Wir müssen also in polynomieller Zeit aus einer beliebigen Formel φ eine Formel φ' in KNF mit höchstens drei Literalen pro Klausel bestimmen, so daß

$$\varphi \text{ erfüllbar} \iff \varphi' \text{ erfüllbar}$$

Dies haben wir bereits in der 8. Vorlesung „Logik und Logikprogrammierung“ getan: Stichwort „Tseitin-Konstruktion“. □

Wir haben gezeigt:

Satz

Die Probleme SAT und 3-SAT sind NP-vollständig.

Das heißt, schon Formeln in KNF mit höchstens drei Literalen pro Klausel enthalten „die volle Schwierigkeit des Erfüllbarkeitsproblems“ SAT.

Was ist mit noch einfacher aussehenden Formeln?

- DNF: Das Erfüllbarkeitsproblem ist in P.
- 2-SAT: Formeln in KNF, die höchstens zwei Literale pro Klausel enthalten?

Satz

Es ist in Polynomialzeit entscheidbar, ob eine Formel φ in KNF mit höchstens zwei Literalen pro Klausel erfüllbar ist.

Beweisidee: konstruiere gerichteten Graphen G:

- Für jede atomare Formel x aus φ gibt es die Knoten x und $\neg x$.
- Für jede Klausel $\alpha \vee \beta$ in φ gibt es Kanten $\sim\alpha \to \beta$ und $\sim\beta \to \alpha$, wobei $\sim x = \neg x$ und $\sim\neg x = x$ gelte.

Dann sind äquivalent (denn für erfüllende Belegung $\mathcal{B}$ und Kante $\sim \alpha \to \beta$ muß $\mathcal{B}(\sim \alpha) \leq \mathcal{B}(\beta)$ gelten):

1. φ ist nicht erfüllbar.
2. es gibt atomare Formel x und Pfad $x \to^* \neg x \to^* x$.

Dies kann in Polyomialzeit entschieden werden. □

Wir haben gezeigt:

Satz

- Die Erfüllbarkeitsprobleme SAT und 3-SAT sind NP-vollständig.
- Das Erfüllbarkeitsproblem 2-SAT ist in P.

Die Grenze zwischen „einfachen“ und „schwierigen“ Formeln liegt also zwischen Formeln in KNF mit höchstens zwei bzw. höchstens drei Literalen pro Klausel.

3C ist NP-vollständig

k-Färbbarkeit von Graphen

EINGABE: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

FRAGE: Gibt es Zuordnung von k verschiedenen Farben zu Knoten in V, so daß keine zwei benachbarten Knoten v_1, v_2 dieselbe Farbe haben?

Definition kC

kC ist die Menge der ungerichteten Graphen, die sich mit k Farben färben lassen.

Ein Graph ist genau dann 2-färbbar, wenn er bipartit ist. Das Problem 2C ist also in P.

Satz

Das Problem 3C ist NP-vollständig.

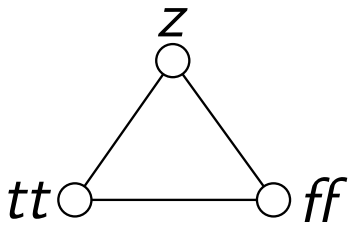
Beweis: 3C $\in$ NP ist einfach zu sehen, da eine Färbung geraten und in polynomieller Zeit überprüft werden kann, ob sie die Bedingungen erfüllt.

Für die NP-Härte zeigen wir 3-SAT $\leq_P$ 3C:
Wir bestimmen dazu eine Reduktionsfunktion, die einer gegebenen Formel φ einen ungerichteten Graphen G zuordnet, so daß φ genau dann erfüllbar ist, wenn G drei-färbbar ist.

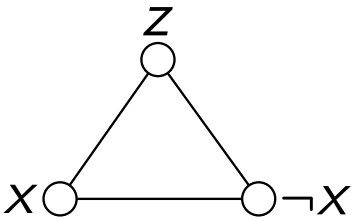
Dabei können wir davon ausgehen, daß φ in konjunktiver Normalform ist und höchstens drei Literale pro Klausel hat.

Sei also φ Formel in KNF, deren Klauseln genau drei Literale enthalten (ggf. ersetze z.B. $x_1 \vee x_2$ durch $x_1 \vee x_2 \vee x_2$). Der Graph G setzt sich wie folgt zusammen:

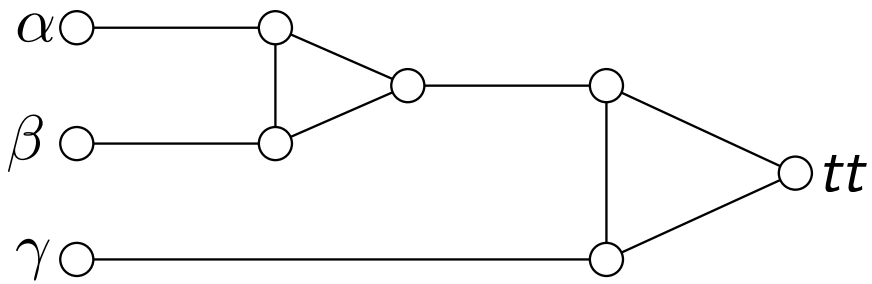
- ein zentrales Dreieck



- für jede atomare Formel x das folgende Atomformel-Dreieck (das den Knoten z des zentralen Dreiecks enthält):

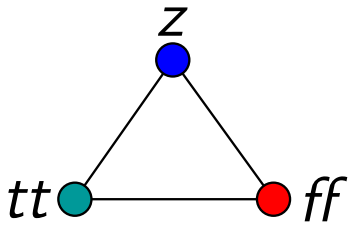


- für jede Klausel $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ den folgenden Klausel-Teilgraphen (der die Knoten *tt* des zentralen und α, β und γ der Atomformel-Dreiecke enthält):

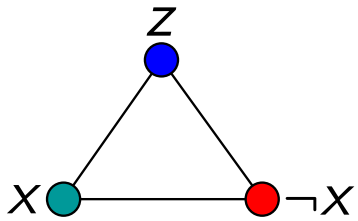


Sei nun $\mathcal{B}$ eine Belegung der Variablen von φ mit $\mathcal{B}(\varphi) = 1$. Wir färben G wie folgt mit den Farben •, • und •:

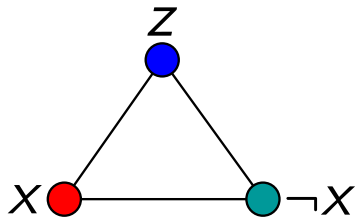
- zentrales Dreieck:



- Atomformel-Dreieck für atomare Formel x:

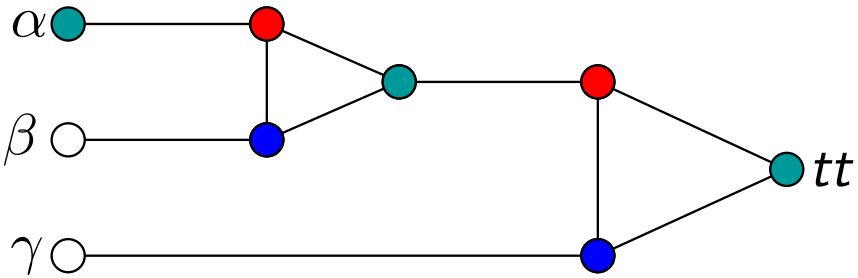


falls $\mathcal{B}(x) = 1$

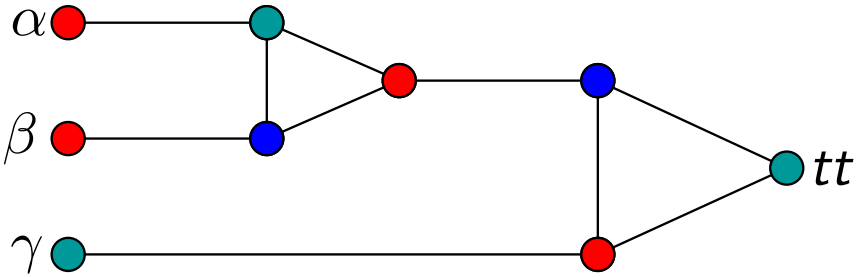


falls $\mathcal{B}(x) = 0$

- Sei $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ Klausel. Wegen $\mathcal{B}(\varphi) = 1$ gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1$ oder $\mathcal{B}(\gamma) = 1$. Keiner der Knoten α, β und γ hat die Farbe •.
  1. $\mathcal{B}(\alpha) = 1$. Dann sind die Knoten α und *tt* •.

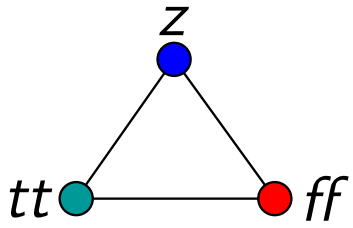


  2. $\mathcal{B}(\beta) = 1$. Man erhält eine analoge Färbung.
  3. $\mathcal{B}(\gamma) = 1$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = 0$.

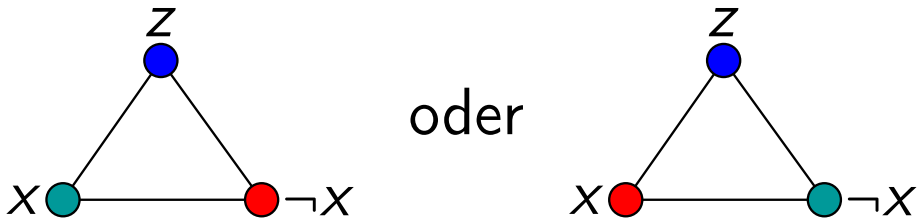


Damit gilt: φ erfüllbar $\Longrightarrow$ G 3-färbbar.

Sei umgekehrt eine Färbung des Graphen G mit drei Farben gegeben. Wir konstruieren eine Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.
Sei Färbung des zentralen Dreiecks wie folgt:

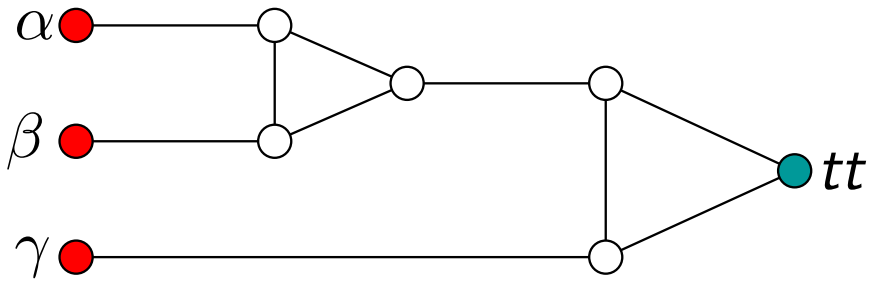


Dann ergibt sich für die Atomformel-Dreiecke:



Im ersten Fall setze $\mathcal{B}(x) = 1$, im zweiten $\mathcal{B}(x) = 0$.

Angenommen, $\mathcal{B}(\varphi) = 0$ mit der eben definierten Belegung $\mathcal{B}$. Dann existiert eine Klausel $\alpha \vee \beta \vee \gamma$ mit $\mathcal{B}(\alpha \vee \beta \vee \gamma) = 0$, also $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\gamma) = 0$. Damit hat der zugehörige Klausel-Teilgraph die Farben



Dies läßt sich nicht zu einer 3-Färbung fortsetzen. Also gilt $\mathcal{B}(\varphi) = 1$, d.h. es gilt: φ erfüllbar $\Longleftarrow$ G 3-färbbar.

Da der Graph G in Polynomialzeit aus der Formel φ berechnet werden kann, haben wir also 3-SAT $\leq_P$ 3C. □

DHC ist NP-vollständig

DHC – Gerichteter Hamiltonkreis

EINGABE: ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$.

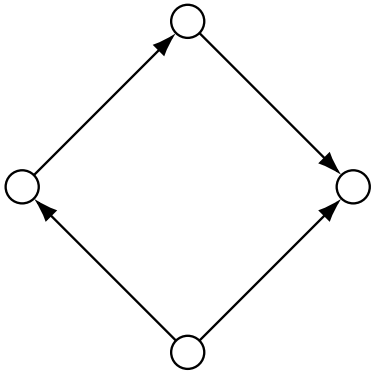
FRAGE: Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis, d.h. kann man den Graphen so durchlaufen, daß jeder Knoten genau einmal besucht wird?

Definition DHC

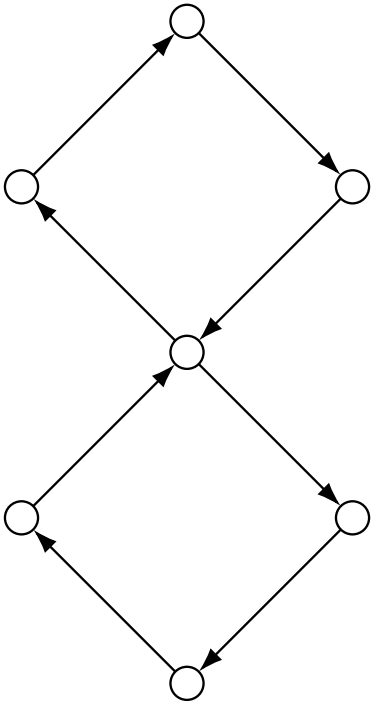
DHC ist die Menge der gerichteten Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten.

Beispiele

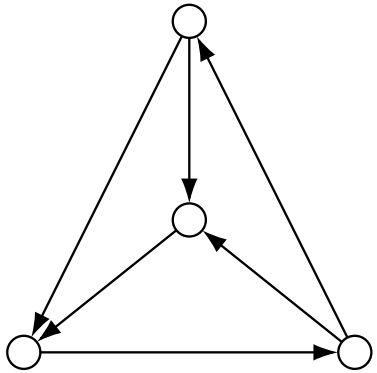
für Graphen mit und ohne Hamiltonkreis:



$\overset{?}{\in}$ DHC



$\overset{?}{\in}$ DHC



$\overset{?}{\in}$ DHC

Man kennt keine Charakterisierung dieser Graphen wie im Satz über die Existenz von Eulerkreisen (obwohl man seit 1857 danach sucht)

Satz

Das Problem DHC ist NP-vollständig.

Beweis: zunächst gilt DHC $\in$ NP, denn man kann einen Hamilton-Kreis raten und in polynomieller Zeit prüfen, ob es sich tatsächlich um einen handelt.
noch zu zeigen ist NP-Härte, wofür 3-SAT $\leq_P$ DHC ausreicht.

Wir bestimmen dazu eine Reduktionsfunktion, die einer gegebenen Formel φ einen gerichteten Graphen G zuordnet, so daß φ genau dann erfüllbar ist, wenn G einen Hamiltonkreis besitzt.

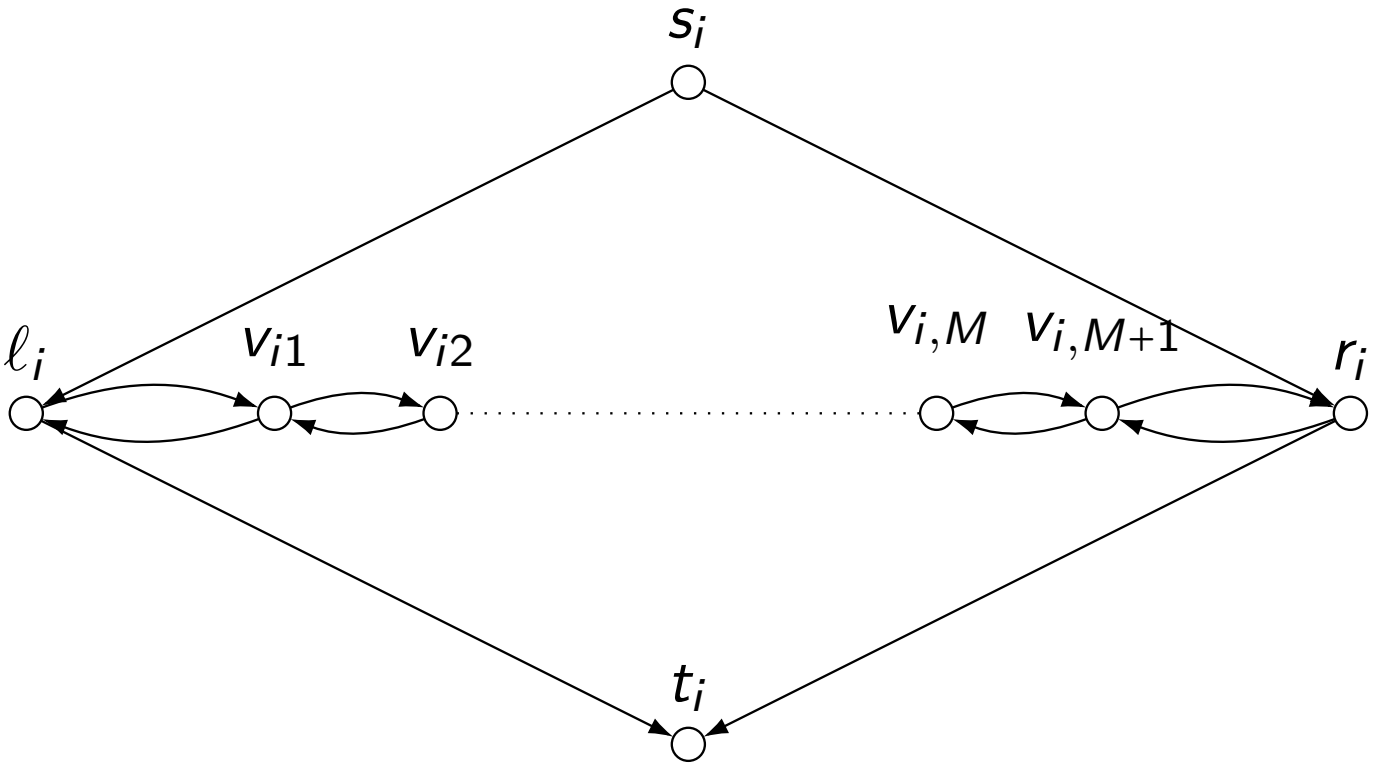
Dabei können wir davon ausgehen, daß φ in konjunktiver Normalform ist und höchstens drei Literale pro Klausel hat.

Sei also φ Formel in KNF mit Klauseln $c_1, c_2, \ldots, c_M$ und atomaren Formeln $x_1, x_2, \ldots, x_N$

Ziel: Berechnung eines gerichteten Graphen G in polynomieller Zeit, der genau dann einen Hamilton-Kreis enthält, wenn φ erfüllbar ist.

Der Graph G enthält

- für jede Klausel c_j einen Knoten C_j $(1 \leq j \leq M)$ und
- für jede atomare Formel x_i das folgende „Diamantengadget“ D_i $(1 \leq i \leq N)$:

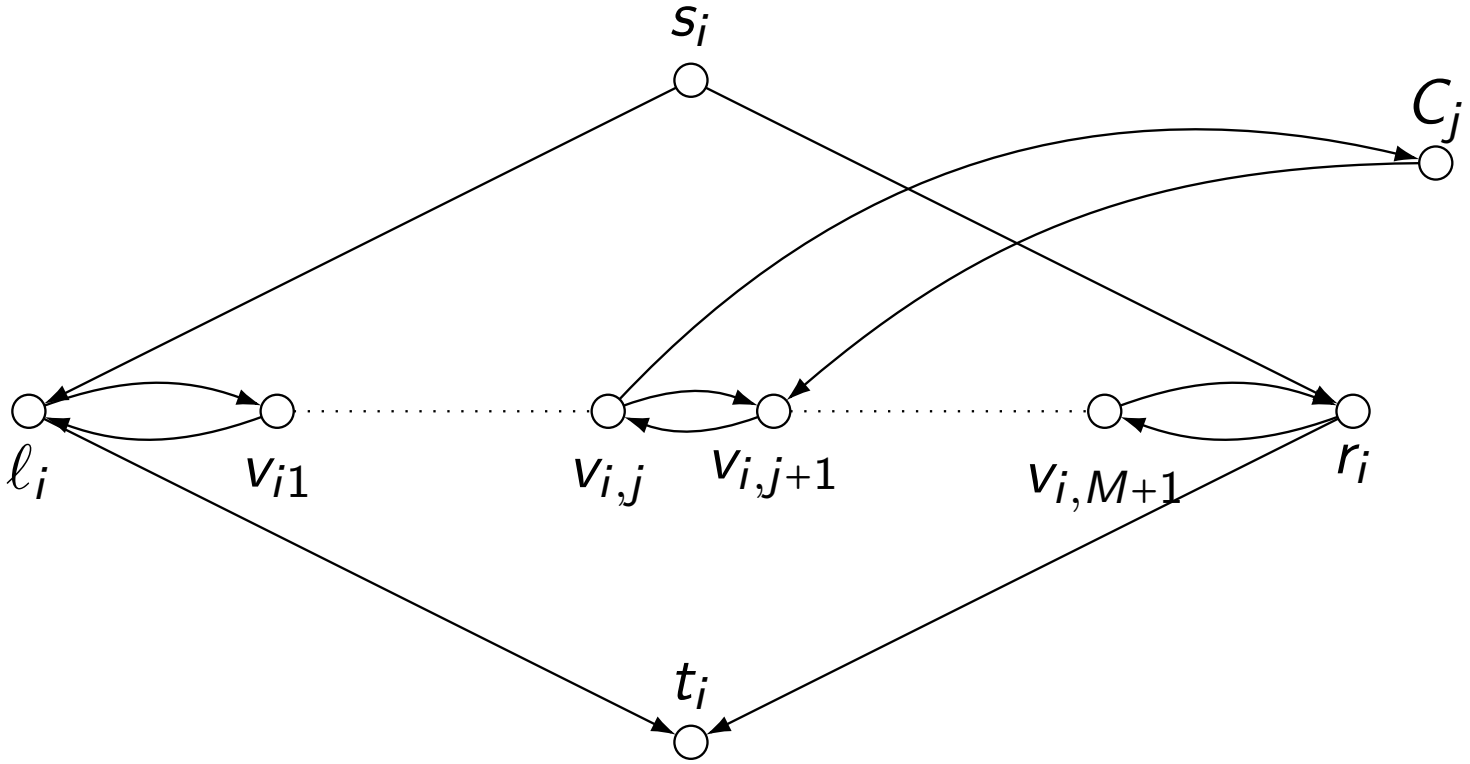


Die Diamantengadgets D_i werden „in einem Ring angeordnet“ durch Kanten (t_i, s_{i+1}) (für alle $1 \leq i < N$) und (t_N, s_1).
$\rightsquigarrow$ jeder Hamiltonkreis muß die Gadgets in der Reihenfolge $D_1, D_2, \ldots, D_N$ durchlaufen und jedes Gadget von rechts nach links oder umgekehrt

Idee: Durchlauf von D_i von links nach rechts kodiert „die atomare Formel x_i wird mit 1 belegt“, Durchlauf von D_i von rechts nach links kodiert „die atomare Formel x_i wird mit 0 belegt“

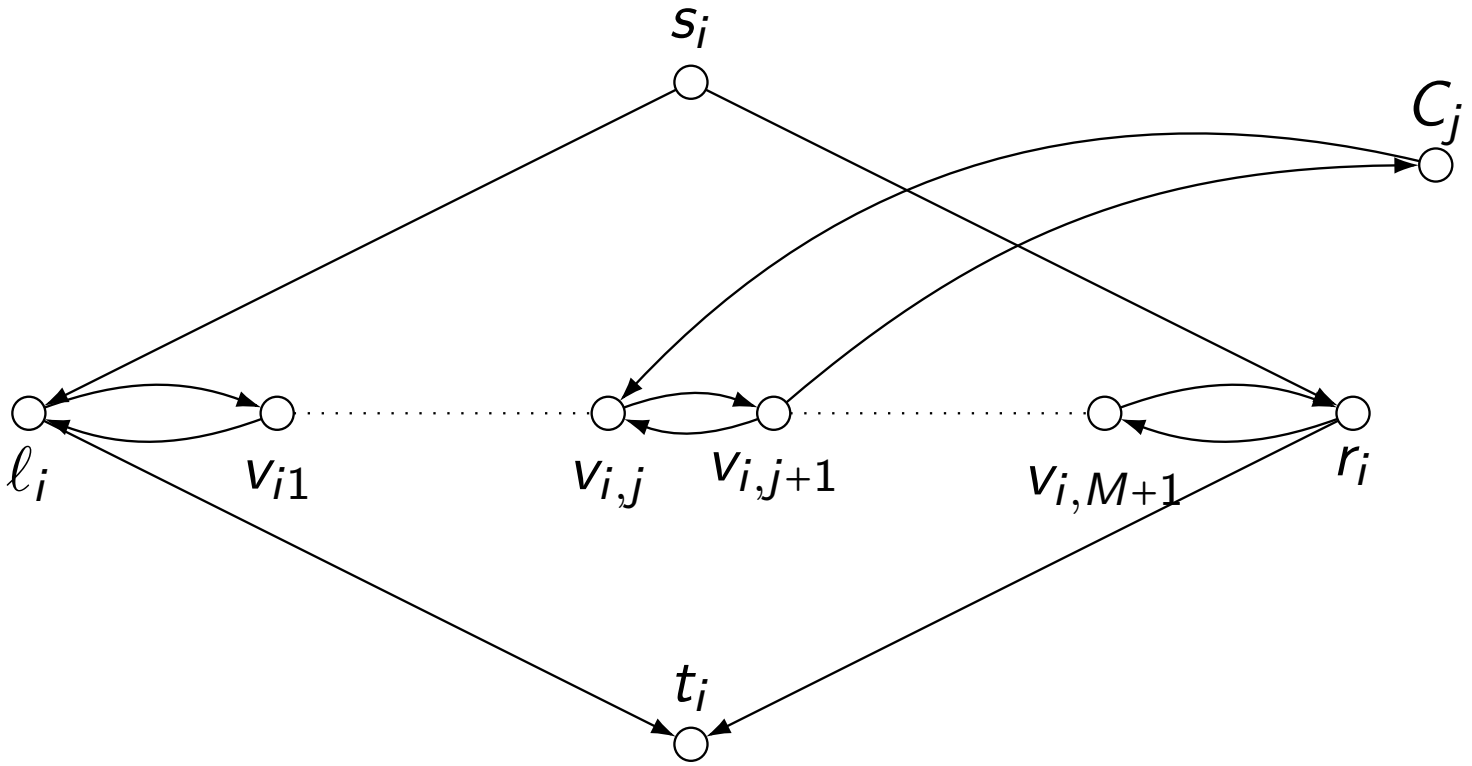
damit: Hamiltonkreise in diesem „Ring“ entsprechen den Belegungen der atomaren Formeln $x_1, \ldots, x_N$

Enthält die Klausel c_j das Literal x_i, so füge Kantenzug $v_{i,j} \to C_j \to v_{i,j+1}$ hinzu:



Idee: Durchlauf von D_i von links nach rechts hieß „atomare Formel x_i mit 1 belegt“, also Klausel c_j wahr - und der ihr zugeordnete Knoten C_j kann im Hamiltonkreis beim Durchlauf von D_i besucht werden

Enthält die Klausel c_j das Literal $\neg x_i$, so füge Kantenzug $v_{i,j+1} \to C_j \to v_{i,j}$ hinzu:



Idee: Durchlauf von D_i von rechts nach links hieß „atomare Formel x_i mit 0 belegt“, also Klausel c_j wahr - und der ihr zugeordnete Knoten C_j kann im Hamiltonkreis beim Durchlauf von D_i besucht werden

Damit gilt für den so definierten Graphen G:

- G hat Hamilton-Kreis $\Longleftrightarrow$ φ ist erfüllbar
- G kann aus φ in polynomieller Zeit berechnet werden.

also: 3-SAT $\leq_P$ DHC, womit folgt, daß DHC NP-hart und damit NP-vollständig ist. □

HC ist NP-vollständig

Im nächsten Schritt zeigen wir, daß auch das analoge Problem für ungerichtete Graphen NP-vollständig ist.

HC – Ungerichteter Hamiltonkreis

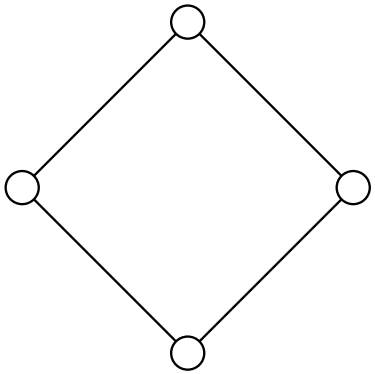
EINGABE: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2} = \left\{X \subseteq V \;\middle|\; |X| = 2\right\}$.

FRAGE: Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis, d.h. kann man den Graphen so durchlaufen, daß jeder Knoten genau einmal besucht wird?

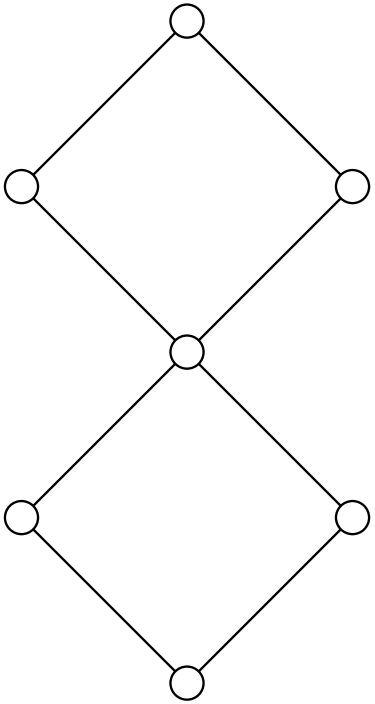
Definition HC

HC ist die Menge der ungerichteten Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten.

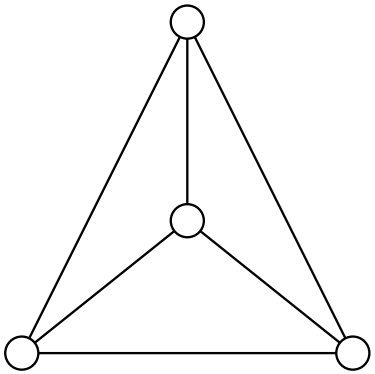
Beispiele für Graphen mit und ohne Hamiltonkreis:



$\overset{?}{\in}$ HC



$\overset{?}{\in}$ HC



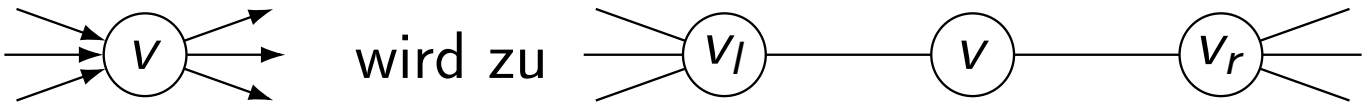
$\overset{?}{\in}$ HC

Satz

Das Problem HC ist NP-vollständig.

Beweis: HC $\in$ NP ist einfach zu sehen, da ein Hamilton-Kreis geraten und in polynomieller Zeit überprüft werden kann, daß es sich in der Tat um einen Hamilton-Kreis handelt.
Für die NP-Härte reicht es, DHC $\leq_P$ HC zu zeigen. Daher müssen wir zu jedem gerichteten Graphen G einen ungerichteten Graphen G' konstruieren, so daß G genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn G' einen Hamiltonkreis hat.

Idee: Ersetze einen Knoten mit ein- und ausgehenden Kanten wie folgt:



□

TSP ist NP-vollständig

Wir zeigen nun, daß auch das Travelling-Salesman-Problem NP-vollständig ist.

TSP – Travelling Salesman

EINGABE: eine $n \times n$-Matrix $M = (M_{i,j})$ von Entfernungen zwischen n Städten und eine Zahl d.

FRAGE: Gibt es eine Tour durch alle Städte, die maximal die Länge d hat? Das heißt, gibt es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_m$, so daß gilt:

(1) $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, n\}$ (jede Stadt kommt vor)

(2) $M_{i_1,i_2} + M_{i_2,i_3} + \cdots + M_{i_{m-1},i_m} + M_{i_m,i_1} \leq d$ (die Länge der Tour ist höchstens d)

Satz

Das Problem TSP ist NP-vollständig.

Beweis: TSP $\in$ NP ist nicht so einfach zu sehen, denn es könnte sein, daß die kürzeste Indexfolge mit (1) und (2) exponentielle Länge hat.

Daher zeigt man zunächst, daß dies nie der Fall ist: Wenn es eine Indexfolge mit (1) und (2) gibt, so gibt es eine der Länge $\leq n^2$. (hier ohne Beweis)

Daher kann doch eine Indexfolge der Länge $\leq n^2$ geraten und in polynomieller Zeit überprüft werden, ob sie die Bedingungen erfüllt.

Für die NP-Härte zeigen wir HC $\leq_P$ TSP:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, o.E. $V = \{1, \ldots, n\}$. Wir konstruieren dazu folgende Matrix:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{falls } \{i,j\} \notin E \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $d = n$. □

Zusammenfassung 14. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Die Probleme 3-SAT, 3C, DHC, HC und TSP sind ebenfalls NP-vollständig.
  Es gibt sehr viele NP-vollständige Probleme, die NP-Vollständigkeit ist also ein weitverbreitetes und natürliches Phänomen.

Zusammenfassung (Komplexitätstheorie)

- Man kann entscheidbare Probleme klassifizieren bezüglich der Ressourcen, die zu ihrer Lösung benötigt werden (Zeit, Platz).
- Man unterscheidet insbesondere zwischen Problemen, die in Polynomialzeit gelöst werden können (Probleme in P) und Problemen, bei denen in Polynomialzeit überprüft werden kann, ob eine geratene und polynomial große Lösung korrekt ist (Probleme in NP).
- Die schwersten Probleme in der Komplexitätsklasse NP heißen NP-vollständig. Viele natürliche Problem fallen in diese Klasse. Für sie gibt es keine bekannten polynomialen Algorithmen.
- Klassifiziert man die entscheidbaren Probleme bzgl. ihres Platzbedarfs, so erhält man Klassen wie PSPACE und EXPSPACE, die ebenfalls natürliche vollständige Probleme enthalten.

Church-Turing These

Die Church-Turing These besagt, daß die Funktionen, die durch Turingmaschinen bzw. WHILE-/GOTO-Programme berechnet werden können, genau die intuitiv berechenbaren Funktionen sind.

Unentscheidbarkeit

Probleme, die nicht durch Turing-Maschinen gelöst werden können, sind damit prinzipiell unlösbar (wenn auch u.U. semi-entscheidbar).

Erweiterte Church-Turing These

Die erweiterte Church-Turing These besagt, daß die Funktionen, die durch Turingmaschine bzw. WHILE-/GOTO-Programme in Polynomialzeit berechnet werden können, genau die intuitiv und effizient berechenbaren Funktionen sind.

NP und darüber

Probleme, die durch Turing-Maschinen nicht in Polynomialzeit gelöst werden können, sind damit prinzipiell nicht effizient lösbar.