A3

(a)

$$\dfrac{\neg\varphi}{\varphi \barwedge \psi}\,(\barwedge I_1) \qquad \dfrac{\neg\psi}{\varphi \barwedge \psi}\,(\barwedge I_2) \qquad \dfrac{\varphi\barwedge\psi \quad \begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg\psi]\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\,(\barwedge E)$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p_1 \barwedge \neg p_1)]^1 \quad \dfrac{[\neg p_1]^2}{p_1 \barwedge \neg p_1}\,(\barwedge I_1)}{\bot}\,(\neg E)}{p_1}\,(raa)^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(p_1 \barwedge \neg p_1)]^1 \quad \dfrac{[\neg\neg p_1]^3}{(p_1 \barwedge \neg p_1)}\,(\barwedge I_2)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg p_1}\,(raa)^3}{\bot}\,(\neg E)}{p_1 \barwedge \neg p_1}\,(raa)^1$$

(c) $\varphi \barwedge \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$

$\barwedge_W(a,b) = 1 - \min(a,b)$ für $W \in \{B, K_3, F\}$

$\barwedge_W(a,b) = \mathbb{R} \setminus (a \cap b)$ für $W = B_{\mathbb{R}}$

(d) $(p_1 \to p_2) \barwedge \neg p_1 \equiv \neg((p_1 \to p_2) \wedge \neg p_1)$

Keine B-, K_3- oder F-Tautologie, Gegenbeispiel:

$B(p_1) = B(p_2) = 0$

Analog für $\mathbb{R}$: $B(p_1) = B(p_2) = \emptyset$

(e) $(\bar\wedge I_1)$ Die Deduktion hat die Form

$$\varepsilon = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \neg\alpha\end{array}}{\alpha \bar\wedge \beta}(\neg I_1)$$

Zeige: $\inf\{B(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq B(\varepsilon)$

Nach I.V. gilt

$\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\} \leq B(\neg\alpha)$

Wir unterscheiden zwei Fälle

1) Sei: $B(\alpha) \leq B(\beta)$

$B(\neg\alpha) = 1 - B(\alpha) = 1 - \min(B(\alpha), B(\alpha)) = 1 - \min(B(\alpha), B(\beta)) = B(\alpha \bar\wedge \beta)$

2) Sei: $B(\alpha) > B(\beta)$:

$B(\neg\alpha) = 1 - B(\alpha) \leq 1 - B(\beta) = 1 - \min(B(\alpha), B(\beta)) = B(\alpha\bar\wedge\beta)$

Also gilt insgesamt $\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\} \leq B(\neg\alpha) \leq B(\alpha\bar\wedge\beta) = B(\varepsilon)$.

Für $(\bar\wedge I_2)$ analog.

$(\bar\wedge E)$: Die Deduktion hat die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \alpha\bar\wedge\beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Gamma\cup\{\neg\alpha\}] \\ \vdots \\ \varepsilon\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Gamma\cup\{\neg\beta\}] \\ \vdots \\ \varepsilon\end{array}}{\varepsilon}$$

Nach I.V. gelten

(1) $\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\} \leq B(\alpha\bar\wedge\beta)$

(2) $\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\} \leq B(\varepsilon)$

(3) $\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\cup\{\neg\beta\}\} \leq B(\varepsilon)$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.) $B(\alpha) \leq B(\beta)$:

$\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\} \overset{(1)}{\leq} B(\alpha\bar\wedge\beta)$
$= 1 - \min(B(\alpha), B(\beta)) = 1 - B(\alpha) = B(\neg\alpha)$

Also gilt

$\inf\{B(\gamma) \mid \gamma\in\Gamma\} = \inf\{B(\gamma) \mid \gamma \in\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\} \overset{(2)}{\leq} B(\varepsilon)$

2. $B(\alpha) > B(\beta)$ analog.