TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2020

Logik und Logikprogrammierung – Übung 2

Abgabe: bis Montag, der 10. Mai 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Seien φ, ψ aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass φ eine Teilformel von ψ ist wenn φ (als syntaktisches Wort) ein Infix von ψ ist. Zum Beispiel ist p_1 eine Teilformel von $\neg(p_2 \land p_1)$, nicht aber $\neg($, da dies keine aussagenlogische Formel ist. Sei $\mathrm{TF}(\varphi)$ die Anzahl der Teilformeln von φ.

Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass für jede aussagenlogische Formel φ die Anzahl der Teilformeln von φ kleiner gleich der Länge von φ ist, also $\mathrm{TF}(\varphi) \leq |\varphi|$.

Aufgabe 2* — 2 Punkte

Vervollständigen Sie die folgende Deduktion um die angewendeten Regeln, gestrichenen Hypothesen und fehlenden Formeln. Markieren Sie zudem für alle gestrichenen Hypothesen, durch welche Regelanwendung diese gestrichen wurden.

$$\dfrac{\varphi \lor \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \land \neg\psi}{}(\land E_1) \quad \varphi}{}(\neg E)}{\neg(\neg\varphi \land \neg\psi)}(\neg I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \land \neg\psi}{}(\land E_2) \quad \psi}{}(\neg E)}{\neg(\neg\varphi \land \neg\psi)}(\neg I)}{\neg(\neg\varphi \land \neg\psi)}$$

Aufgabe 3* — 4 Punkte

In Aufgabe 1 des 1. Übungsblattes haben wir einen Sachverhalt durch folgende Formeln formalisiert:

$$A \to B \qquad B \to C \qquad C \to D \qquad D \to (A \lor B) \qquad (B \land D) \to \neg C$$

Konstruieren Sie eine formale Deduktion von $\neg B$, die nur diese Formeln als Hypothesen nutzt (alle anderen Hypothesen sind gestrichen).

Aufgabe 4* — 3+2 Punkte

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass in der Aussagenlogik sowohl Konjunktion als auch Disjunktion assoziativ sind. Seien dazu p_1, p_2, p_3 aussagenlogische Formeln.

(a) Zeigen Sie, dass $\{p_1 \land (p_2 \land p_3)\} \vdash (p_1 \land p_2) \land p_3$ gilt.

Hinweis: Es gibt eine einfache Deduktion, die ausschließlich die Regeln ($\land$E$_1$), ($\land$E$_2$) und ($\land$I) verwendet.

(b) Zeigen Sie, dass $\{p_1 \lor (p_2 \lor p_3)\} \vdash (p_1 \lor p_2) \lor p_3$ gilt, indem Sie die folgende Deduktion vervollständigen.