TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2021

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 3

Abgabe: bis Montag, der 17. Mai 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1* — 2 Punkte

Werten Sie die folgenden Formeln für die jeweils angegebene Belegung aus.

(a) $p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ für die K_3-Belegung mit $B(p_1) = \frac{1}{2}$, $B(p_2) = 1$ und $B(p_3) = 0$.

(b) $(p_1 \vee p_2) \to (p_2 \wedge p_3)$ für die F-Belegung mit $B(p_1) = 0.3$, $B(p_2) = 0.7$ und $B(p_3) = 1$.

(c) $\neg(p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$ für die $B_{\mathbb{R}}$-Belegung mit $B(p_1) = \mathbb{R}$, $B(p_2) = [1, \pi]$ und $B(p_3) = [3, 42]$.

(d) $p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ für die $H_{\mathbb{R}}$-Belegung mit $B(p_1) = \mathbb{R}_{>0}$, $B(p_2) = (-10, 5)$ und $B(p_3) = (-20, -3)$.

Aufgabe 2* — 3 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Entscheiden Sie welche der folgenden Paare $\Gamma \vDash_W \varphi$ erfüllen. Beweisen Sie Ihre Behauptung zum Beispiel durch Angabe einer Wahrheitstabelle.

(i) $\Gamma = \{p_1 \to p_1\}$, $\varphi = p_1$, $W \in \{B, K_3\}$

(ii) $\Gamma = \{p_1 \to p_2, p_1\}$, $\varphi = p_2$, $W \in \{B, K_3\}$

(iii) $\Gamma = \{p_3 \vee (p_1 \wedge p_2)\}$, $\varphi = (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee p_2)$, $W \in \{B\}$

(b) Entscheiden Sie für $W \in \{B, K_3\}$, welche der folgenden Formeln W-Tautologien sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(i) $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$

(ii) $\neg(p_1 \wedge \bot)$

(iii) $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \to (p_1 \to (p_2 \to p_3))$

Aufgabe 3* — 1+1+1+1+3+3 Punkte

Wir erweitern die Aussagenlogik um den zweistelligen Operator $\barwedge$ NAND (nicht ... und ...).

(a) Überlegen Sie sich, wie Sie eine Aussage "nicht (φ und ψ)" beweisen bzw. in einem Beweis verwenden würden und geben Sie entsprechende Regeln ($\barwedge I$) und ($\barwedge E$) an.

Hinweis: Orientieren Sie sich für ($\barwedge E$) an der Regel ($\vee E$) und nutzen Sie, dass $\varphi \barwedge \psi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

(b) Verwenden Sie die Regel aus Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass $p_1 \barwedge \neg p_1$ ein Theorem ist.

(c) Beschreiben Sie die Semantik des Operators durch Angabe einer Funktion $\barwedge_W$ wie auf den Folien 3.9ff für die Wahrheitswertebereiche $W \in \{B, B_{\mathbb{R}}, K_3, F\}$.

(d) Überprüfen Sie, ob die Formel $(p_1 \to p_2) \barwedge \neg p_1$ eine W-Tautologie ist für $W \in \{B, K_3, B_{\mathbb{R}}\}$.

(e) Angenommen wir erweitern die Regeln des natürlichen Schließens um ($\barwedge I$) und ($\barwedge E$). Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen und den Wahrheitswertebereich B den Induktionsschritt für diese Regeln an, vgl. Folie 4.4ff.

(f) Zeigen Sie per vollständiger Induktion über den Formelaufbau, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine Formel ψ gibt, die nur $\barwedge$ als Operator enthält und äquivalent zu φ ist, $\varphi \equiv \psi$ vgl. Folie 5.13.