

## Logik und Logikprogrammierung – Übung 5

Abgabe: bis Montag, der 31. Mai 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

### Aufgabe 1\*

1+1+1 Punkte

Leiten Sie die folgenden Äquivalenzen her, Sie können die Äquivalenzen auf Folie 5.13 verwenden.

- (a)  $a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$
- (b)  $a \vee (a \wedge b) \equiv a$
- (c)  $\neg a \rightarrow \perp \equiv a$

### Aufgabe 2\*

4 Punkte

Sei  $A$  eine endliche Menge. Der Wahrheitswertebereich  $B_A$  hat die Form  $(2^A, \subseteq, \rightarrow_{2^A}, \neg_{2^A})$  mit

$$\neg_{B_A}(X) = A \setminus X \text{ und } \rightarrow_{B_A}(X, Y) = (A \setminus X) \cup Y.$$

Zeigen Sie, dass natürliches Schließen für jeden Wahrheitswertebereich  $B_A$  korrekt ist.

*Hinweis:* Führen Sie die Korrektheit für Wahrheitswertebereiche der Form  $B_A$  auf die Korrektheit für den Boole'schen Wahrheitswertebereich zurück.

### Aufgabe 3\*

1+1+1 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen!

- (a) Aus  $\Gamma \not\vdash_W \varphi$  folgt  $\Gamma \vDash_W \neg\varphi$  für jeden Wahrheitswertebereich  $W$ .
- (b) Es gibt eine Menge aussagenlogischer Formeln  $\Gamma$  und eine Formel  $\varphi$  mit  $\Gamma \vdash \varphi$  und  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ .
- (c) Angenommen, es gäbe eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  mit  $\emptyset \vdash \varphi$  und  $\emptyset \vdash \neg\varphi$ . Dann ist jede aussagenlogische Formel ein Theorem.

### Aufgabe 4\*

3+2 Punkte

Der Schnitt zweier  $B$ -Belegungen  $B_1, B_2$  sei  $B_1 \cap B_2$ , wobei  $B_1 \cap B_2(p_i) = \min(B_1(p_i), B_2(p_i))$  für alle atomaren Formeln  $p_i$ .

- (a) Zeigen Sie, dass Belegungen, die Horn-Formeln erfüllen unter Schnitt abgeschlossen sind, dass also für jede Horn-Formel  $\varphi$  und  $B$ -Belegungen  $B_1, B_2$  gilt: Wenn  $B_1(\varphi) = 1$  und  $B_2(\varphi) = 1$ , dann auch  $B_1 \cap B_2(\varphi) = 1$ .
- (b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass  $\varphi = \neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_3 \vee p_4)$  keine Horn-Formel ist.

## Aufgaben zum Selbststudium

### Aufgabe 5

Schreiben Sie eine Zusammenfassung des ersten Kapitels der Vorlesung.