TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2021

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 6

Abgabe: bis Montag, der 07. Juni 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1*

2 Punkte

Seien x, y, z Variablen, P ein einstelliges Relationssymbol, Q ein zwei-stelliges Relationssymbol, a ein null-stelliges Funktionssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie die freien Variablen der folgenden Formeln an. Welche der Formeln sind Sätze?

(a) $\forall x\colon Q(x,x) \to \exists x\colon Q(x,y)$

(b) $P(f(x)) \to \exists x\colon P(x)$

(c) $P(a) \vee P(f(a))$

(d) $\exists z\colon (Q(z,x) \vee Q(y,z)) \to \exists y\colon (Q(x,y) \wedge Q(x,z))$

Aufgabe 2*

2 Punkte

Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen und Σ' eine endliche Signatur mit Relationen $R_1, \dots, R_r$, Funktionen $f_1, \dots, f_k$ und ar entsprechende Stelligkeitsfunktion. Wir können die Menge $PL(X)$ der prädikatenlogischen Σ'-Formeln mit Variablen aus X als eine formale Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{\bot, \wedge, \vee, \to, \neg, (,), \exists, \forall, =\} \cup \{,\} \cup X \cup \Sigma'$ auffassen.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $PL(X)$ an.

Aufgabe 3*

1+1+1+1 Punkte

Geben Sie für jedes der folgenden Graphenpaare $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ einen prädikatenlogischen Satz an, sodass $\mathcal{G}_1$ Modell für diese Formel ist, $\mathcal{G}_2$ aber nicht.

(a)

(b)

(c)

(d)

Aufgabe 4* 1+1+1 Punkte

Sei Γ die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol $\in$. Für eine Menge von Mengen M definieren wir die Struktur $\mathcal{S}$ mit $U_{\mathcal{S}} = M$ und $\in^{\mathcal{S}} = \in$. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine Formel an, die diese beschreibt.

(a) Es gibt eine Menge, die keine Menge enthält.

(b) Für alle Mengen A, B gibt es eine Menge, die genau A und B enthält.

(c) Für jede Menge A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente der Menge A enthält.

Hinweis: Sie können den $\leftrightarrow$ Operator in ihrer Formel verwenden.

Aufgabe 5* 1+1+1+1 Punkte

Sei Γ die Signatur bestehend aus einem zwei-stelligen Relationssymbol E. Für einen (gerichteten) Graphen $G = (V, E)$ definieren wir dann die Struktur $\mathcal{G}$ mit $V = U_{\mathcal{G}}$ und $E = E^{\mathcal{G}}$. Welche der folgenden Aussagen sind sind wahr? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) $\{\exists x \exists y \exists z \colon (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, x))\}$ ist erfüllbar.

(b) $\{\exists x \forall y \colon E(x, y)\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(c) $\{\forall x \forall y \colon (E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x))\} \models \forall x \forall y \colon (E(x, y) \wedge E(y, x) \rightarrow x = y)$

(d) $\{\forall x \forall y \colon (E(x, y) \vee E(y, x))\} \models \exists x \exists y \colon (E(x, y) \wedge \neg x = y)$