

## Logik und Logikprogrammierung – Übung 7

Abgabe: bis Montag, der 14. Juni 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

### Aufgabe 1\*

2 Punkte

Vervollständigen Sie die unten aufgeführte Deduktion, indem Sie die verwendeten Regeln angeben und gegebenenfalls temporäre Hypothesen kenntlich machen. Welche syntaktische Folgerung wird durch die Deduktion gezeigt?

$$\frac{\frac{\frac{\forall y: E(x, y)}{E(x, y)}}{\exists x \forall y: E(x, y)} \quad \frac{\exists x: E(x, y)}{\exists x: E(x, y)}}{\frac{\exists x: E(x, y)}{\forall y \exists x: E(x, y)}} \quad \frac{\forall y \exists x: E(x, y)}{\exists x \forall y: E(x, y) \rightarrow \forall y \exists x: E(x, y)}$$

### Aufgabe 2\*

1+1+1 Punkte

Geben Sie für die folgenden (inkorrekten) Ableitungen je einen fehlerhaften Ableitungsschritt an. Begründen Sie!

(a)

$$\frac{\frac{\exists x(x = a)}{\forall x(x = a)} \quad \frac{[x = a]^1}{\forall x(x = a)} (\forall\text{-I})}{\forall x(x = a)} (\exists\text{-E})^1$$

(b)

$$\frac{\frac{[\forall y(P(y, y))]^1}{\exists x \forall y(P(x, y))} (\exists\text{-I})}{\forall y(P(y, y)) \rightarrow \exists x \forall y(P(x, y))} (\rightarrow\text{-I})^1$$

(c)

$$\frac{\frac{\frac{[\exists x(P(x))]^2}{P(x)} [P(x)]^1}{\forall x(P(x))} (\forall\text{-I})}{\exists x(P(x)) \rightarrow \forall x(P(x))} (\rightarrow\text{-I})^1$$

### Aufgabe 3\*

2 Punkte

Sei  $\Sigma$  eine Signatur mit dem zweistelligen Funktionssymbol  $f$ . Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Deduktion, dass für beliebige  $\Sigma$ -Terme  $s_1, s_2, t_1, t_2$  gilt:  $\{s_1 = t_1, s_2 = t_2\} \vdash f(s_1, s_2) = f(t_1, t_2)$ .

### Aufgabe 4\*

4 Punkte

Wir betrachten die Formelmengende  $\Gamma = \{\exists B \forall C (\neg C \in B), \forall A \forall B \exists C (A \in C \wedge B \in C \wedge \forall D (D \in C \rightarrow C = A \vee C = B))\}$  und die Formel  $\varphi = \exists C \exists B \forall A (\neg A \in B \wedge B \in C)$  für die Signatur, die nur das zweistellige Relationssymbol  $\in$  enthält. Zeigen Sie, dass  $\Gamma \vdash \varphi$  gilt indem Sie eine Deduktion angeben.

### Aufgabe 5\*

4 Punkte

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik den Induktionsschritt für den Fall  $(\exists\text{-I})$  (vgl. Lemma auf Folie 9.10) an.