TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2021

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 8

Abgabe: bis Montag, der 21. Juni 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1* 2+2+2 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Mengen von Schließregeln. Wir sagen, dass eine Menge von R von Schließregeln *verifizierbar* ist, wenn es entscheidbar ist, ob in einer Deduktion ausschließlich Regeln aus R verwendet wurden. Beispielsweise sei R_{nat} die Menge der Regeln des natürlichen Schließens. In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass R_{nat} verifizierbar ist.

Geben Sie je eine Mengen von Schließregeln an, die

(a) nicht vollständig, aber korrekt und verifizierbar ist.

(b) vollständig, nicht korrekt, aber verifizierbar ist.

(c) vollständig und korrekt, aber nicht verifizierbar ist.

Begründen Sie jeweils kurz, dass Ihre Regelmenge die entsprechenden Eigenschaften hat.

Aufgabe 2* 2+2 Punkte

Wir betrachten die folgenden Sachverhalte:

- Vorlesungen werden von genau einem Professor gehalten.
- Studierende können Vorlesungen besuchen.
- Studierende können den Vortragsstil eines Professors mögen.
- Ein Studierender besucht eine Vorlesung genau dann, wenn er den Vortragsstil des Professors mag.
- Jedes Objekt ist entweder ein Studierender, ein Professor oder eine Vorlesung, aber nicht Mehreres davon zugleich.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Formalisieren Sie die angegebenen Sachverhalte in der Prädikatenlogik. Verwenden Sie dazu einstellige Relationssymbole P(rofessor), S(tudierender), V(orlesung) und zweistellige Relationssymbole H(ält die Vorlesung), M(ag den Vortragsstil), B(esucht die Vorlesung). Formalisieren Sie insbesondere auch zwischen welchen Objekten die Beziehungen H, M und B bestehen können.

(b) Wir sagen, dass zwei Objekte o_1 und o_2 äquivalent sind (in Zeichen $o_1 \sim o_2$), wenn sie gleich sind oder vom gleichen Professor gehalten werden. Weisen Sie nach, dass die resultierende Relation $\sim$ unter den gegebenen Voraussetzungen eine Kongruenz ist.

Bitte wenden!

Wir sagen, dass eine Klasse von Strukturen K von einem Satz φ (bzw. einer Formelmenge Φ) axiomatisiert wird, falls $\mathcal{A} \in K$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{A} \models \Phi$).
Zum Beispiel axiomatisiert $\varphi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$ die Menge der Strukturen mit mindestens n Elementen und $\Phi_\infty = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Klasse der Strukturen mit unendlich vielen Elementen.

Aufgabe 3* $\boxed{\text{1+1+3 Punkte}}$

Sei Σ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E. Im Folgenden verstehen wir Σ-Strukturen $\mathcal{G}$ als unter Umständen unendliche, gerichtete Graphen $\mathcal{G} = (U_\mathcal{G}, E^\mathcal{G})$.

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n an, sodass ψ_n die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es einen Pfad[1] der Länge n gibt.

(b) Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, sodass $\mathcal{G} \models \Psi$ die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es beliebig lange Pfade gibt.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keinen Σ-Satz ψ gibt, der die Klasse der Graphen axiomatisiert, die nicht beliebig lange Pfade besitzen.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es so einen Satz ψ gibt und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von $\Phi \cup \{\psi\}$ mittels Kompaktheitssatz einen Widerspruch her.

Aufgaben zum Selbststudium

Aufgabe 4

Zeigen Sie für jede der folgenden Klassen von Strukturen, dass sie durch einen Satz, nur durch eine unendliche Formelmenge und nicht durch einen Satz oder auch nicht durch unendliche eine Formelmenge axiomatisiert werden kann. Wir betrachten wieder die Signatur Σ für Graphen.

(a) Die Klasse der Graphen, die keinen Kreis der Länge 3 enthalten.

(b) Die Klasse der endlichen Graphen.

(c) Die Klasse der Graphen, die keinen Kreis, aber eine 5-Clique enthalten. Eine k-Clique ist eine Menge von k vielen Knoten in der zwischen jedem Knotenpaar eine Kante existiert.

(d) Die Klasse der kreisfreien Graphen.

(e) Die Klasse der Graphen, die einen Kreis enthalten.

(f) Die Klasse der Graphen, die zu $(2^\mathbb{N}, \emptyset)$ isomorph sind.

Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, den Satz auf Folie 10.4 und den Satz von Löwenheim-Skolem. Die Aufgabenteile (d) und (e) lassen sich gut zusammen bearbeiten.

[1] Es gibt einen Pfad der Länge n, falls es Knoten $v_0, \dots, v_n$ gibt mit $E(v_i, v_{i+1})$ für $0 \leq i < n$.