TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2021

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 9

Abgabe: bis Montag, der 28. Juni 2021, um 13:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1*

2+1 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol. Weiterhin sei

$$\varphi = \neg\exists x(R(x, f(x)) \wedge \forall y \exists x(R(y, x)))$$

(a) Berechnen Sie eine Formel ψ_1 in Pränexform, die äquivalent ist zu φ.

(b) Berechnen Sie eine Formel ψ_2 in Skolemform, die erfüllbarkeitsäquivalent ist zu φ.

Aufgabe 2*

2 Punkte

Der Algorithmus zur Berechnung der Skolemform liefert für die Formel $\exists x\colon P(x)$ das Ergebnis $P(a)$ mit einer neuen Konstanten a. Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3*

2 Punkte

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R, der Konstante a und dem zweistelligen Funktionssymbol g. Gegeben sei weiterhin die folgende Formel:

$$\varphi = \forall x \forall y\colon \big(R(x, g(x, y)) \vee R(x, a) \wedge (\neg R(y, x) \vee R(y, g(x, y)))\big)\,.$$

Geben Sie jeweils mindestens zwei Elemente des Herbrand-Universums und der Herbrand-Expansion an.

Aufgabe 4*

2+3 Punkte

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R und den Konstanten a und b. Betrachten Sie die folgende Formel

$$\varphi = \forall x \forall y\colon \big(R(a, b) \wedge (R(x, x) \to R(a, y)) \wedge \neg R(y, a)\big)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(\varphi)$.

(b) Überprüfen Sie, ob $E(\varphi)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Aufgabe 5*

3 Punkte

Sei Σ die Signatur mit dem einstelligen Relationssymbol P, der Konstante a und den einstelligen Funktionssymbolen f und g. Betrachten Sie die Formel

$$\varphi = \forall x\colon \big(P(a) \wedge (P(x) \to P(f(x))) \wedge \neg P(g(x))\big)\,.$$

Weiterhin sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit

- $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{Q}$,
- $P^{\mathcal{A}} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $a^{\mathcal{A}} = 1$,
- $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{Q}$ und
- $g^{\mathcal{A}}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Q}$.

Dann kann leicht $\mathcal{A} \models \varphi$ gezeigt werden. Konstruieren Sie aus $\mathcal{A}$ eine Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$, welche ebenfalls Modell für φ ist (Vgl. den Beweis zum Satz auf Folie 12.17ff).

Aufgaben zum Selbststudium

Die folgenden Aufgaben sind zum Selbststudium gedacht und werden weder bewertet noch in der Übung besprochen.

Aufgabe 6

Sei Σ eine Signatur mit zweistelligem Relationssymbol P, dem einstelligen Funktionssymbol g, dem zweistelligen Funktionssymbol f und den Konstanten a und b.

Welche der folgenden Mengen von atomaren Formeln sind unifizierbar? Ermitteln Sie dazu mittels des Unifikationsalgorithmus einen Unifikator oder aber zeigen Sie, an welcher Stelle der Algorithmus mit der Ausgabe „nicht unifizierbar“ abbricht. Geben Sie im positiven Fall einen zweiten Unifikator an.

(a) $\{P(y, f(a, z)),\ P(b, f(a, b))\}$

(b) $\{P(y, f(x, x)),\ P(b, f(a, y))\}$

(c) $\{P(y, f(x, y)),\ P(g(z), f(a, z))\}$