TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2022

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 4

Abgabe bis zum 02. Mai um 13:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1*

2+3+2 Punkte

Wir betrachten den Operator $\otimes$ (raxlifaxli) und erweitern das natürliche Schließen um die Regeln

$$\frac{\neg\,\varphi}{\varphi\otimes\psi}\,(\otimes\mathrm{I}_1) \quad\text{und}\quad \frac{\neg\,\psi}{\varphi\otimes\psi}\,(\otimes\mathrm{I}_2) \quad\text{sowie}\quad \dfrac{\varphi\otimes\psi \qquad \begin{matrix}[\neg\,\varphi]\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\neg\,\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\,(\otimes\mathrm{E}) .$$

(a) Geben Sie je eine Deduktion für $\{\varphi\otimes\psi\}\vdash\neg\,\varphi\vee\neg\,\psi$ und für $\{\neg\,\varphi\vee\neg\,\psi\}\vdash\varphi\otimes\psi$ an.

(b) Beschreiben Sie die Semantik des Operators $\otimes$ im Boole'schen Wahrheitswertebereich durch Angabe einer Funktion $\otimes_B$ derart, dass das natürliche Schließen, erweitert um die Regeln ($\otimes\mathrm{I}_1$), ($\otimes\mathrm{I}_2$) und ($\otimes$E), korrekt ist. Zeigen Sie die Korrektheit, indem Sie den Beweis der Vorlesung um die fehlenden Induktionsschritte ergänzen.

(c) Seien p und q atomare Formeln. Geben Sie zu jeder der Formeln $\neg\,p, p\wedge q, p\vee q$ und $p \longrightarrow q$ je eine äquivalente Formel an, welche ausschließlich den Operator $\otimes$ verwendet.

Hinweis: Aus Aufgabenteilen (a) und (b) folgt $p\otimes q\equiv\neg\,p\vee\neg\,q$. Sie dürfen weiterhin die Äquivalenzen auf Folie 5.13 für beliebige Formeln verwenden (etwa $\varphi\vee\psi\equiv\psi\vee\varphi$).

Aufgabe 2

Für eine Menge A bezeichne B_A den Wahrheitswertebereich $(\mathcal{P}(A),\subseteq,\longrightarrow_{B_A},\neg_{B_A})$ mit

$$\neg_{B_A}(X)=A\setminus X \quad\text{und}\quad \longrightarrow_{B_A}(X,Y)=(A\setminus X)\cup Y.$$

Zeigen Sie, dass das natürliches Schließen für jeden Wahrheitswertebereich B_A korrekt ist.

Aufgabe 3*

1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_2$[1] bzw. $\mathbb{Q}$ mit Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ziel ist es zu zeigen, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen der Lösbarkeit unendlicher Gleichungssysteme über den beiden Ringen existiert. Genauer möchten wir zeigen, dass ein abzählbares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ insbesondere dann eine Lösung besitzt, wenn bereits jedes endliche Teilsystem lösbar ist. Eine analoge Aussage für die rationalen Zahlen gilt hingegen nicht.
Seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ paarweise verschiedene atomare Formeln. In Aufgabenteilen (a_1) bis (a_6) betrachten wir den Ring $\mathbb{Z}_2$; (b_1) und (b_2) widmen sich Gleichungssystemen über $\mathbb{Q}$.

(a_1) Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3 = 1. \tag{†}$$

Geben Sie eine Formel φ an, sodass φ genau dann unter einer B-Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (†) ist (wobei $\mathcal{B}(p_i)$ als Element aus $\mathbb{Z}_2$ aufgefasst wird).

(a_2) Ein *Monom*[2] ist ein endliches Produkt von Potenzen von Variablen (zum Beispiel $x_1\,x_2^2\,x_4$). Wir schreiben $M(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Monoms M unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i\geq 1$ und $v_i\in\mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Monom M eine Formel φ_M an, sodass für alle B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_M)=1 \quad\text{gdw.}\quad M(\mathcal{B}(p_1),\mathcal{B}(p_2),\ldots)=1.$$

[1] $\mathbb{Z}_2$ ist der Ring $(\{0,1\},+,\cdot,0,1)$ mit Addition und Multiplikation modulo 2.
[2] Wir betrachten ausschließlich Monome über $\mathbb{Z}_2$, d.h. die Reihenfolge der Faktoren ist irrelevant und wir können o.B.d.A. annehmen, dass es keine konstanten Koeffizienten gibt.

(a_3) Ein *multivariates Polynom* ist eine endliche Summe von Monomen (zum Beispiel $x_1+x_2^2+x_2x_3+x_3$). Analog zu oben schreiben wir $P(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Polynoms P unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i \geq 1$ und $v_i \in \mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Polynom P eine Formel φ_P an, sodass für alle B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_P) = 1 \quad \text{gdw.} \quad P(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots) = 1.$$

(a_4) Eine *Gleichung* hat die Form

$$P = c,$$

wobei P ein multivariates Polynom und $c \in \mathbb{Z}_2$ eine Konstante ist.
Geben Sie für jede Gleichung (E) eine Formel $\varphi_{(E)}$ an, sodass $\varphi_{(E)}$ genau dann unter einer B-Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (E) ist.

(a_5) Sei (G) ein abzählbares System von Gleichungen (E_i) für $i \in I$ und $I \subseteq \mathbb{N}$. Geben Sie eine Menge $\Gamma_{(G)}$ von Formeln an, sodass $\Gamma_{(G)}$ genau dann unter einer B-Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (G) ist.

(a_6) Folgern Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes des Aussagenlogik, dass (G) genau dann lösbar ist, wenn jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung besitzt.

(b_1) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem (G) über $\mathbb{Q}$ (zur Vereinfachung verwenden wir Variablen x_i, y_i und z):

$$\begin{array}{lll} x_1 & = 1 & \\ x_{i+1} & = x_i + 1 & \text{für alle } i \geq 1 \\ x_i + y_i^2 & = z & \text{für alle } i \geq 1 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt.

(b_2) Zeigen Sie, dass das vollständige Gleichungssystem (G) aus Aufgabenteil (b_1) hingegen *keine* Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Aufgabe 4

Sei R ein beliebiger endlicher und kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass die Aussage aus Aufgabe 3 (a_6) auch für Gleichungssysteme über R gilt.