TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2022

Logik und Logikprogrammierung – Übung 5

Abgabe bis zum 09. Mai um 13:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1

Seien p und q atomare Formeln. Leiten Sie unter Verwendung der Äquivalenzen auf Folien 5.13ff die folgenden Zusammenhänge her:

(a) $p \vee \neg \bot \equiv \neg \bot$
(b) $p \wedge \neg \bot \equiv p$
(c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
(d) $p \longrightarrow q \equiv \neg q \longrightarrow \neg p$
(e) $\neg p \longrightarrow \bot \equiv p$

Hinweis: Sie dürfen die Äquivalenzen auf Folie 5.13 für beliebige Formeln verwenden.

Aufgabe 2*

1+1+1+1+1 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine Menge aussagenlogischer Formeln Γ und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg \varphi$.

(b) Die Formelmenge $\{\neg \varphi\}$ ist genau dann erfüllbar, wenn φ kein Theorem ist.

(c) Wenn φ im Wahrheitswertebereich F gültig ist, dann ist $\bot$ eine Teilformel von φ.

(d) Für alle Formelmengen Γ und alle Formeln φ gilt

$$\Gamma \not\models_B \varphi \quad \longrightarrow \quad \Gamma \models_B \neg \varphi.$$

(e) Für alle konsistenten Formelmengen Γ und alle Formeln φ gilt

$$\Gamma \models_B \varphi \quad \longrightarrow \quad \Gamma \not\models_B \neg \varphi.$$

Gilt die Aussage auch, falls auf die Forderung, dass Γ konsistent ist, verzichtet wird?

Aufgabe 3*

2+2 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$\{\, p_5 \wedge (p_2 \vee \neg p_1 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_5 \vee p_1) \wedge (\neg p_4 \vee p_3) \wedge (\neg p_5 \vee p_2) \,\} \models_B p_4$$

(b) Überprüfen Sie mittels Makierungsalgorithmus, ob die folgende Formel φ eine Tautologie ist.

$$(p_3 \wedge \neg p_2 \wedge p_5) \vee (p_4 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_4) \vee \neg p_2 \vee p_4$$

Aufgabe 4* 3+3 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die unten angegebene Folgerung gilt.

$$\{\, p_2 \wedge (\neg\, p_2 \vee \neg\, p_3 \vee p_5) \wedge (\neg\, p_2 \vee p_4 \vee \neg\, p_5) \wedge (p_6 \vee \neg\, p_4) \wedge (\neg\, p_3 \vee p_1 \vee \neg\, p_6) \,\} \models_B \neg\, p_3 \vee (p_5 \wedge p_1)$$

(b) Überprüfen Sie mittels SLD-Resolution, ob die folgende Formel φ eine Tautologie ist.

$$(p_3 \wedge \neg\, p_2 \wedge p_4) \vee (p_5 \wedge p_2 \wedge p_4) \vee (\neg\, p_5 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee \neg\, p_4 \vee \neg\, p_3$$

Aufgabe 5

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Seien φ eine Hornformel, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}$ passende B-Belegungen mit $\min\{\mathcal{B}_1(p), \mathcal{B}_2(p)\} = \mathcal{B}(p)$ für alle atomaren Formeln p und $\mathcal{B}_1(\varphi) = \mathcal{B}_2(\varphi) = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\varphi) = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass in Aufgabenteil (a) auf die Eigenschaft von φ Hornformel zu sein, nicht verzichtet werden kann.

(c) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass es keine zu $\varphi = \neg(p_1 \wedge p_2) \longrightarrow (p_3 \vee p_4)$ äquivalente Hornformel gibt.