TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2022

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 6

Abgabe bis zum 16. Mai um 13:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1* 2 Punkte

Seien x, y, z Variablen, P ein einstelliges Relationssymbol, Q ein zweistelliges Relationssymbol, a ein null-stelliges Funktionssymbol und f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie die freien Variablen der folgenden Formeln an. Welche der Formeln sind Aussagen (vgl. Folie 7.16)?

(a) $\big(\forall x\colon Q(x,x)\big) \longrightarrow \exists x\colon Q(x,y)$
(b) $P(f(y)) \longrightarrow \exists x\colon P(x)$
(c) $\forall y\colon \big(P(a) \vee P(f(a))\big)$
(d) $\exists z\colon \big((Q(z,x) \vee Q(x,z)) \longrightarrow \exists x\colon (Q(x,y) \wedge Q(x,z))\big)$

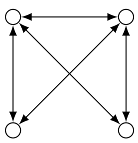
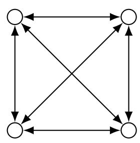
Aufgabe 2* 2 Punkte

Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche, nicht-leere Menge von Variablen und Σ eine endliche Signatur mit Relationen $R_1, \ldots, R_r$, Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ und Stelligkeitsfunktion ar. Wir können die Menge $\mathrm{PL}(\Sigma, X)$ der prädikatenlogischen Σ-Formeln mit Variablen aus X als eine formale Sprache über dem Alphabet $\Gamma_{\Sigma,X} = \{\bot, \wedge, \vee, \longrightarrow, \neg, (,), \exists, \forall, =\} \cup \{,\} \cup X \cup \Sigma$ auffassen.
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $\mathrm{PL}(\Sigma, X)$ an.

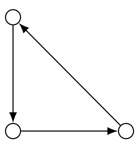
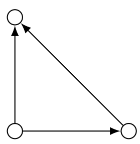
Aufgabe 3* 3 Punkte

Sei Σ die Signatur von Folie 7.20. Geben Sie für jedes der folgenden Graphenpaare G, H einen prädikatenlogischen Satz an, sodass $\mathcal{A}_G$ Modell für diese Formel ist, $\mathcal{A}_H$ hingegen nicht.

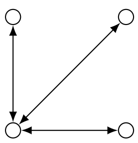
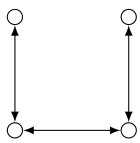
(a)

G  H 

(b)

G  H 

(c)

G  H 

Aufgabe 4* 4 Punkte

Wir betrachten wieder die Signatur Σ von Folie 7.20. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Aussage!

(a) $\big\{\, \exists x \exists y \exists z\colon \big(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x)\big) \,\big\}$ ist erfüllbar.

(b) $\big\{\, \exists x \forall y\colon \big(y = x \vee E(x,y)\big) \,\big\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(c) $\big\{\, \forall x \forall y\colon \big(E(x,y) \longrightarrow \neg E(y,x)\big) \,\big\} \models \forall x \forall y\colon \big((E(x,y) \wedge E(y,x)) \longrightarrow x = y\big)$.

(d) $\big\{\, \forall x \forall y\colon \big(E(x,y) \vee E(y,x)\big) \,\big\} \models \exists x \exists y\colon \big(E(x,y) \wedge \neg(x = y)\big)$.

Aufgabe 5* 4 Punkte

Sei Σ die Signatur mit Relationssymbolen V, P, T, N und B, Konstanten dk, al, kt, $lulp$, ask und gut, sowie der Stelligkeitsfunktion ar mit $ar(V) = ar(P) = ar(T) = 2$, $ar(N) = 3$ und $ar(B) = 1$. Sei M die Menge aller Professoren, Studenten, Fachgebiete und Vorlesungen an der TU Ilmenau, sowie der Noten *sehr gut* bis *ungenügend*. Wir betrachten die Σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Universum M und

$(v, p) \in V^{\mathcal{A}}$	$\longleftrightarrow$	die Vorlesung v wird vom Professor p gehalten,
$(p, f) \in P^{\mathcal{A}}$	$\longleftrightarrow$	p ist ein Professor vom Fachgebiet f,
$(s, v) \in T^{\mathcal{A}}$	$\longleftrightarrow$	der Student s nimmt an der Vorlesung v teil,
$(v, s, n) \in N^{\mathcal{A}}$	$\longleftrightarrow$	der Student s hat in der Klausur zur Vorlesung v die Note n erreicht,
$n \in B^{\mathcal{A}}$	$\longleftrightarrow$	die Note n heißt bestanden (z.B. $gut^{\mathcal{A}} \in B^{\mathcal{A}}$),
$dk^{\mathcal{A}}$	steht für	Professor Kuske,
$al^{\mathcal{A}}$	steht für	das Fachgebiet Automaten und Logik (AL), usw.

Beispiel: Die Aussage “Es gibt einen Studenten, welcher an der Vorlesung LuLP teilnimmt” kann etwa durch die Formel $\exists s\colon T(s, lulp)$ beschrieben werden.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine Σ-Formel an, welche diese beschreibt:

(a) Es gibt einen Studenten, welcher eine Prüfung bei Professor Kuske mit gut bestanden hat.

(b) Jeder Student, welcher die Klausur zur Vorlesung LuLP bestanden hat, hat auch die Klausur zur Vorlesung ASK bestanden.

(c) Jeder Student nimmt an wenigstens einer Vorlesung des Fachgebietes KT teil.

(d) Das Fachgebiet AL umfasst genau eine Professur, und die wird von D. Kuske besetzt.