

Logik und Logikprogrammierung – Übung 7

Abgabe bis zum 23. Mai um 13:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1 (Selbststudium)

Wir betrachten die Signatur $\Sigma = (P, Q, a)$ mit den einstellig Relationen P, Q und der Konstanten a . Entscheiden Sie für die folgenden Σ -Formeln, ob diese unerfüllbar, allgemeingültig, oder weder unerfüllbar noch allgemeingültig sind¹. Begründen Sie Ihre Entscheidung z.B. durch Angabe geeigneter Strukturen.

- (a) $P(x) \longrightarrow P(a)$
- (b) $(\exists x: P(x)) \longrightarrow P(a)$
- (c) $\exists x: (P(x) \longrightarrow P(a))$
- (d) $(\forall x: (P(x) \longrightarrow Q(x))) \longrightarrow \exists x: Q(x)$

Aufgabe 2*

3 Punkte

Vervollständigen Sie die unten aufgeführte Deduktion, indem Sie die verwendeten Regeln angeben und gegebenenfalls temporäre Hypothesen kenntlich machen. Welche syntaktische Folgerung wird durch die Deduktion gezeigt?

$$\frac{\frac{\frac{\forall y: E(x, y)}{E(x, y)}}{\exists x \forall y: E(x, y)} \quad \frac{E(x, y)}{\exists x: E(x, y)}}{\exists x: E(x, y)} \quad \frac{\exists x: E(x, y)}{\forall y \exists x: E(x, y)}}{\exists x \forall y: E(x, y) \longrightarrow \forall y \exists x: E(x, y)}$$

Zusatz: Ist die umgekehrte Implikation, d.h. die Aussage $\forall y \exists x: E(x, y) \longrightarrow \exists x \forall y: E(x, y)$ allgemeingültig?

Aufgabe 3*

6 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden, inkorrekten Deduktionen je den falschen Ableitungsschritt an und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a)
$$\frac{\frac{\forall x \exists y: x + 1 = y}{\exists y: y + 1 = y} (\forall E) \quad \frac{[y + 1 = y]^1 \quad y = 0}{0 + 1 = 0} (\text{GfG})}{0 + 1 = 0} (\exists E)^1$$

(b)
$$\frac{\frac{\frac{\overline{y = y}}{y = y} (\text{R})}{\forall y: y = y} (\forall I)}{\exists x \forall y: x = y} (\exists I)$$

(c)
$$\frac{\frac{\frac{[P(x)]^1}{\forall x: P(x)} (\forall I)}{[\neg \forall x: P(x)]^2} (\neg E)}{\frac{\perp}{\neg P(x)} (\neg I)^1} (\neg E)}{\forall x: \neg P(x)} (\forall I)}{\neg \forall x: P(x) \longrightarrow \forall x: \neg P(x)} (\rightarrow I)^2$$

¹D.h. ob sowohl die Formel, als auch ihre Negation je wenigstens ein Modell besitzen.

(d)

$$\frac{\frac{[\exists x: P(x)]^2 \quad [P(x)]^1}{P(x)} (\exists E)^1}{\forall x: P(x)} (\forall I)}{\exists x: P(x) \longrightarrow \forall x: P(x)} (\rightarrow I)^2$$

Aufgabe 4*

4 Punkte

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik den Induktionsschritt für den Fall ($\exists I$) an (vgl. Lemma auf Folie 9.10).

Aufgabe 5*

3 Punkte

Zeigen Sie $\{\forall x: (P(x) \longrightarrow Q(x))\} \vdash (\exists x: P(x)) \longrightarrow (\exists x: Q(x))$, indem Sie eine Deduktion angeben.

Zusatz: Zeigen Sie, dass auch die semantische Folgerung gilt (ohne den Korrektheitssatz zu verwenden).