TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2022

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 8

Abgabe bis zum 30. Mai um 13:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol $\leq$. Geben sind die nachfolgenden Paare von Strukturen (wobei $\leq$ jeweils die übliche bzw. komponentenweise Ordnungsrelation bezeichnet). Geben Sie für jedes Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je eine Aussage an, sodass genau eine der beiden Strukturen ein Modell für diese Formel ist.

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \leq)$
(b) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$
(c) $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Q}, \leq)$
(d) $\mathcal{A} = (\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\{0,1\} \times \{0,1,2,3\}, \leq)$

Aufgabe 2* — 4 Punkte

Für eine ganze Zahl $m \geq 2$ bezeichne $\equiv_m$ die Kongruenz modulo m auf der Menge der natürlichen Zahlen, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \equiv_m b$ genau dann, wenn $b - a$ ein ganzzahliges Vielfaches von m ist. Zeigen Sie, dass die Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, (\equiv_m)_{m \geq 2})$ der Struktur der natürlichen Zahlen mit Addition und Kongruenzen entscheidbar ist.

Hinweis: Reduzieren Sie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, (\equiv_m)_{m\geq 2})$ auf $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$, d.h. konstruieren Sie aus einer Formel, in welcher Relationen $\equiv_m$ vorkommen eine äquivalente Formel, welche ohne diese auskommt.

Zusatz: Überlegen sie sich, wo der Unterschied zu $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, |)$ liegt.

Seien Σ eine Signatur und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Σ-Strukturen. Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zueinander *isomorph* sind (in Zeichen $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn eine Bijektion $\pi : U^{\mathcal{A}} \longrightarrow U^{\mathcal{B}}$ existiert, sodass gilt:

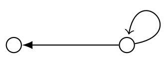
(I1) $(a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$ gdw. $(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)) \in R^{\mathcal{B}}$ für alle Relationen R mit $r = \mathrm{ar}(R)$ und alle $a_1, \ldots, a_r \in U^{\mathcal{A}}$, sowie
(I2) $\pi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = f^{\mathcal{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k))$ für alle Funktionen f mit $k = \mathrm{ar}(f)$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in U^{\mathcal{A}}$.

Bemerkung: Die obigen Eigenschaften ähneln denen einer *Kongruenz* (siehe Folie 11.11); allerdings wird hier über eine Beziehung zwischen zwei Σ-Strukturen gesprochen).
Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorphe Σ-Strukturen und ist φ eine Aussage, so kann leicht gezeigt werden, dass entweder beide Strukturen ein Modell für φ sind, oder dass keine der Strukturen ein Modell für φ ist.
Wir möchten uns im folgenden überlegen, ob auch die Umkehrung gilt, d.h. ob es zu jeder Struktur $\mathcal{A}$ eine Aussage $\varphi_{\mathcal{A}}$ (oder eine Menge von Aussagen $\Gamma_{\mathcal{A}}$) gibt, welche die Isomorphieklasse von $\mathcal{A}$ beschreibt.

Aufgabe 3* — 2 Punkte

Gegeben sei der folgende Graph G. Geben Sie eine Formel φ_G an, sodass für alle Graphen H gilt: $\mathcal{A}_H \models \varphi_G$ gdw. $\mathcal{A}_G \cong \mathcal{A}_H$ (für die Definition der Struktur $\mathcal{A}_G$ siehe Folie 7.20).

G



Aufgabe 4

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligem Relationssymbol E. Sei weiterhin $\mathcal{A}$ eine endliche Σ-Struktur. Geben Sie in Abhängigkeit von $\mathcal{A}$ eine Aussage $\varphi_{\mathcal{A}}$ an, sodass für alle Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}$ gdw. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Zusatz: Passen Sie Ihre Lösung für den Fall an, dass Σ neben der Relation E zusätzlich noch ein einstelliges Funktionssymbol f besitzt.

Aufgabe 5

Sei Σ eine Signatur. Zeigen Sie, dass es eine unendliche Σ-Struktur $\mathcal{A}$ gibt, sodass für alle Mengen Γ von Aussagen mit $\mathcal{A} \models \Gamma$ gilt: Es existiert eine Σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models \Gamma$ aber $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Löwenheim-Skolem.

Sei Σ eine Signatur. Wir sagen, dass eine Klasse C von Σ-Strukturen von einer Aussage φ (bzw. einer Menge Φ von Aussagen) *axiomatisiert* wird, falls eine Σ-Struktur $\mathcal{A}$ genau dann in C ist, wenn $\mathcal{A} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{A} \models \Phi$) gilt. Zum Beispiel axiomatisiert $\varphi_{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \colon \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ die Klasse der Strukturen mit mindestens n Elementen und $\Phi = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$ die Klasse der Strukturen mit unendlich vielen Elementen.

Aufgabe 6* 1+1+3 Punkte

Sei Σ die Graphen-Signatur von Folie 7.20.

(a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_n so an, dass φ_n die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es einen Pfad der Länge n gibt[1].

(b) Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ so an, dass Φ die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen es beliebig lange Pfade gibt.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keine Aussage ψ gibt, welche die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen alle Pfade beschränkte Länge haben.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Aussage ψ gibt und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von $\Phi \cup \{\psi\}$ unter Verwendung des Kompaktheitssatzes einen Widerspruch her.

Zusatz: Zeigen Sie, dass es auch keine Formelmenge Ψ gibt, welche die Klasse der Graphen axiomatisiert, in denen alle Pfade beschränkte Länge haben.

[1] Ein Pfad der Länge n ist ein Graph P mit $V(P) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ (wobei $|V(P)| = n + 1$) und $v_i v_j \in E(P)$ gdw. $j = i + 1$ f.a. $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 7 (Selbststudium)

Wir betrachten wieder die Signatur Σ für Graphen (siehe Folie 7.20). Zeigen Sie für jede der folgenden Klassen von Strukturen, dass sie (i) durch eine Aussage, (ii) nur durch eine unendliche Formelmenge aber nicht durch eine Aussage oder (iii) auch nicht durch eine unendliche Formelmenge axiomatisiert werden kann:

(a) Die Klasse der Graphen, deren Maximalgrad durch $d \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.
(b) Die Klasse der Graphen, in denen es Knoten mit beliebig hohem Grad gibt.
(c) Die Klasse der endlichen Graphen.
(d) Die Klasse der Graphen, die keinen Kreis, aber eine 5-Clique[2] enthalten.
(e) Die Klasse der kreisfreien Graphen.
(f) Die Klasse der Graphen, die einen Kreis enthalten.
(g) Die Klasse der bipartiten Graphen.
(h) Die Klasse der Graphen, die zu $(2^{\mathbb{N}}, \emptyset)$ isomorph sind.
(i) Die Klasse der Graphen, die einen festen, endlichen Graphen H als Teilgraphen enthalten.

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, den Satz auf Folie 10.4, sowie den Satz von Löwenheim-Skolem. Die Aufgabenteile (e) und (f) lassen sich gut zusammen bearbeiten.

[2]Eine k-Clique ist eine Menge von k paarweise benachbarten Knoten.