TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2022

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 9

Abgabe bis zum 07. Juni um 9:00 Uhr vor der Übung bzw. um 10:30 Uhr im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1* — 3 Punkte

Geben Sie für jedes der folgenden Paare $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je eine Aussage an, welche in genau einer der beiden Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt.

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$
(b) $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
(c) $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$

Bemerkung: Sie dürfen in Ihren Formeln die Infixnotation für $+$ und $\cdot$ verwenden.

Aufgabe 2* — 6 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden vermeintlichen Deduktionen, ob es sich tatsächlich um eine (korrekte) Deduktion handelt. Geben Sie gegebenenfalls einen fehlerhaften Ableitungsschritt an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a)

$$\dfrac{\exists x\colon x = 0 \qquad \dfrac{[x = 0]^1 \qquad x = 1}{1 = 0}\ (\text{GfG})}{1 = 0}\ (\exists\text{E})^1$$

(b)

$$\dfrac{\exists x\colon E(x,x) \qquad \dfrac{[E(x,x)]^1}{\exists y\colon E(y,y)}\ (\exists\text{I})}{\exists y\colon E(y,y)}\ (\exists\text{E})^1$$

(c)

$$\dfrac{\exists x \forall y\colon E(x,y) \qquad \dfrac{[\forall y\colon E(x,y)]^1}{\forall x \forall y\colon E(x,y)}\ (\forall\text{I})}{\forall x \forall y\colon E(x,y)}\ (\exists\text{E})^1$$

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \wedge Q(x)}{P(x)}\ (\wedge\text{E}_1)}{\exists z\colon P(z)}\ (\exists\text{I})}{\forall x \exists z\colon P(z)}\ (\forall\text{I})$$

Aufgabe 3* — 2+2 Punkte

Seien f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol. Gegeben sei die Formel $\varphi = \neg \exists x\colon \big((\forall y \exists x\colon R(y, f(x))) \wedge R(y,x)\big)$.

(a) Berechnen Sie eine Formel ψ_1 in Pränexform, die äquivalent ist zu φ (vgl. Folien 12.6ff).
(b) Berechnen Sie eine Formel ψ_2 in Skolemform, die erfüllbarkeitsäquivalent ist zu φ.

Aufgabe 4*

$\boxed{\text{2 Punkte}}$

Wir möchten in dieser Aufgabe zeigen, dass in Satz 12.19 auf die Forderung, dass φ gleichungsfrei ist, nicht verzichtet werden kann. Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E, dem einstelligen Funktionssymbol f, sowie der Konstanten a. Betrachte die Aussage $\varphi = \forall x\colon E(x, f(x)) \wedge f(x) = a$ in Skolemform. Zeigen Sie, dass φ erfüllbar ist, aber kein Herbrand-Modell besitzt.

Aufgabe 5

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R, der Konstanten a, sowie dem zweistelligen Funktionssymbol g. Gegeben sei weiterhin die folgende Formel:

$$\varphi = \forall x \forall y\colon R(x, g(a, y)) \wedge \neg R(x, y).$$

Geben Sie jeweils mindestens zwei Elemente des Herbrand-Universums und der Herbrand-Expansion an.

Aufgabe 6

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol R, sowie den Konstanten a und b. Betrachten Sie die Formel

$$\varphi = \forall x \forall y\colon \big(R(a, b) \wedge (R(x, x) \longrightarrow R(a, y)) \wedge \neg R(y, a)\big).$$

(a) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $\mathrm{E}(\varphi)$.
(b) Überprüfen Sie, ob $\mathrm{E}(\varphi)$ im aussagenlogischen Sinn erfüllbar ist (vgl. Folie 13.4).

Aufgabe 7 (Selbststudium)
Wir betrachten die Strukturen $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, f^{\mathcal{A}}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, f^{\mathcal{B}}, \leq)$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$. Geben Sie für jedes der folgenden Paare $(f^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{B}})$ je eine Aussage an, welche in genau einer der beiden Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt.

(a) $f^{\mathcal{A}}(x) = e^x$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = x^2$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

(b) $f^{\mathcal{A}}(x) = e^x$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = 2x$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

(c) $f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1/x^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = x^2$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

(d) $f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = \sin(x)$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 8 (Selbststudium)
Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligem Relationssymbol P, dem einstelligen Funktionssymbol g, dem zweistelligen Funktionssymbol f, sowie den Konstanten a und b. Welche der folgenden Mengen von atomaren Formeln sind unifizierbar? Ermitteln Sie dazu mittels des Unifikationsalgorithmus einen Unifikator oder zeigen Sie, an welcher Stelle der Algorithmus mit der Ausgabe "nicht unifizierbar" abbricht. Geben Sie im positiven Fall einen zweiten Unifikator an.

(a) $\{ P(y, f(a, z)),\ P(b, f(a, y)) \}$
(b) $\{ P(y, f(x, x)),\ P(b, f(a, y)) \}$
(c) $\{ P(y, f(x, y)),\ P(g(z), f(a, z)) \}$