

Natürliches Schließen

Ein (mathematischer) Beweis zeigt, wie die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt (vgl. Folie 1.29).

Analog zeigt ein „Beweisbaum“ (= „Herleitung“ = „Deduktion“), wie eine Formel der Aussagenlogik aus Voraussetzungen (ebenfalls Formeln der Aussagenlogik) folgt.

Diese „Deduktionen“ sind Bäume (vgl. Folie 1.30), deren Knoten mit Formeln beschriftet sind:

- an der Wurzel steht die Behauptung (= **Konklusion** φ)
- an den Blättern stehen Voraussetzungen (= **Hypothesen** oder **Annahmen** aus Γ)
- an den inneren Knoten stehen „Teilergebnisse“ und „Begründungen“



Konstruktion von Deduktionen

Aus der Annahme der Aussage φ folgt φ unmittelbar:

eine triviale Deduktion

φ

mit Hypothesen $\{\varphi\}$ und Konklusion φ .

Auf den folgenden Folien werden wir

- **überlegen**, wie aus „einfachen mathematischen Beweisen“ umfangreichere entstehen können und
- parallel dazu **definieren**, wie aus einfachen Deduktionen umfangreichere konstruiert werden können.

Konjunktionseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ φ und ψ “ sieht üblicherweise so aus:

„Zunächst zeige ich φ : ... (hier steckt die eigentliche Arbeit)
Jetzt zeige ich ψ : ... (nochmehr eigentliche Arbeit)
Also haben wir „ φ und ψ “ gezeigt. qed“

Konjunktionseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ D \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ E \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

Konjunktionseinführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

Konjunktionselemination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ , so ergeben sich die folgenden Deduktionen von φ bzw. von ψ mit Hypothesen aus Γ :

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ D \\ \hline \varphi \wedge \psi \\ \hline \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ D \\ \hline \varphi \wedge \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Konjunktionselemination (Kurzform)

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_2)$$

Beispiel

Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$ unter der Hypothese $\psi \wedge \varphi$:

$$\frac{\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi} (\wedge E_2) \quad \frac{\psi \wedge \varphi}{\psi} (\wedge E_1)}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

Dies ist eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \wedge \psi$ und Hypothese $\psi \wedge \varphi$ (zweimal verwendet).

Implikationseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „Aus φ folgt ψ “ sieht üblicherweise so aus:

„Angenommen, φ gilt.

Dann ... (hier steckt die eigentliche Arbeit).

Damit gilt ψ .

Also haben wir gezeigt, daß ψ aus φ folgt. qed“

Die Aussage φ ist also eine „temporäre Hypothese“.

Implikationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \rightarrow \psi$ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, \varphi, \varphi \\ \triangle D \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Implikationseinführung (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I)$$

Beispiel

$$\frac{[\varphi]}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)$$

Dies ist eine Deduktion von $\varphi \rightarrow \varphi$ ohne Hypothesen.

Implikationselimination in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ ψ gilt“ über eine Hilfsaussage sieht so aus:

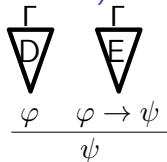
„Zunächst zeigen wir, daß φ gilt: ...

Dann beweisen wir, daß ψ aus φ folgt: ...

Also haben wir ψ gezeigt. qed“

Implikationselimination oder modus ponens (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von $\varphi \rightarrow \psi$ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ :



Implikationselimination oder modus ponens (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

Beispiel

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I) \quad \frac{\frac{\frac{\sigma}{\psi \rightarrow \sigma} (\rightarrow I)^2}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)} (\rightarrow I)^1}{((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma))} (\rightarrow I)^3}{[(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma]} (\rightarrow E)}{((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma))} (\rightarrow I)^3$$

Bemerkung: die Indizes 1, 2 und 3 machen deutlich, welche Hypothese bei welcher Regelanwendung gestrichen wurde.

Diese Deduktion hat keine Hypothesen!

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ σ gilt“ mittels Fallunterscheidung sieht üblicherweise so aus:

„Zunächst zeigen wir, daß $\varphi \vee \psi$ gilt: ...

Gilt φ , so gilt σ , denn ...

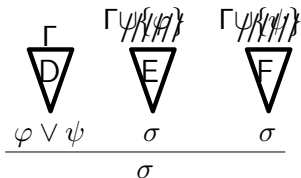
Gilt ψ , so gilt ebenfalls σ , denn ...

Also haben wir gezeigt, daß σ gilt. qed“

Die Aussagen φ und ψ sind also wieder „temporäre Hypothesen“.

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \vee \psi$ mit Hypothesen aus Γ , ist E eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und ist F eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\psi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von σ mit Hypothesen aus Γ :



Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \quad [\psi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \vee \psi \quad \sigma \quad \sigma \end{array}}{\sigma} \text{ (VE)}$$

Disjunktionseinführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \text{ (VI}_1\text{)} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \text{ (VI}_2\text{)}$$

Negationseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ φ gilt nicht“ sieht so aus:

„Angenommen, φ gilt.

Dann folgt $0 = 1$, denn Mit anderen Worten, dies führt zu einem Widerspruch.

Also haben wir gezeigt, daß φ nicht gilt. qed“

Die Aussage φ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

Negationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von \perp mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ :



Negationselimination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von \perp mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ D \\ \neg\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ E \\ \varphi \end{array}}{\perp}$$

Negationseinführung und -elimination (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} (\neg I) \qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

Hat man „ $0 = 1$ “ bewiesen, so ist man bereit, alles zu glauben:

ex falso sequitur quodlibet

(ausführlich)

Ist D eine Deduktion von \perp mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\frac{\Gamma}{\perp} D}{\varphi}$$

(Kurzform)

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp)$$

math. Widerspruchsbeweis

Ein indirekter Beweis einer Aussage „ φ gilt“ sieht üblicherweise so aus:

„Angenommen, φ gilt nicht, d.h. $\neg\varphi$ gilt.

Dann folgt $0 = 1$, d.h. ein Widerspruch.

Also haben wir gezeigt, daß φ gilt. qed“

Die Aussage $\neg\varphi$ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

reductio ad absurdum (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von \perp mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\Gamma \{ \cancel{\varphi} \} \quad \begin{array}{c} \nabla \\ D \\ \perp \end{array}}{\varphi}$$

reductio ad absurdum (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \text{ (raa)}$$

Regeln des natürlichen Schließens I

 φ

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_1)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_2)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_1)$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_2)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma} (\vee E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

Regeln des natürlichen Schließens II

$$\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \neg\varphi \end{array} (\neg I)$$

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp)$$

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \varphi \end{array} (\text{raa})$$

Definition

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ . Wir sagen „ φ ist eine **syntaktische Folgerung** von Γ “.

Eine Formel φ ist ein **Theorem**, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

Bemerkung

$\Gamma \vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über die Tatsache, daß φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.

Ebenso sagt „ φ ist Theorem“ nur, daß φ abgeleitet werden kann, über „Wahrheit“ sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Satz

Für alle Formeln φ und ψ gilt $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\perp} (\neg I)^1 \quad \frac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi} (\vee I_1)}{\neg\varphi} (\neg E) \quad \frac{\frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\perp} (\neg I)^2 \quad \frac{[\psi]^2}{\varphi \vee \psi} (\vee I_2)}{\neg\psi} (\neg E)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi} (\wedge I)}$$



Satz

$$\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\frac{\frac{\frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi} (\wedge E_1) \quad [\varphi]^1}{\perp} (\neg E) \quad \frac{\frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\psi} (\wedge E_2) \quad [\psi]^2}{\perp} (\neg E)}{\frac{\perp}{\neg(\varphi \vee \psi)} (\neg I)^2} (\vee E)^1$$

Satz

$$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi]^1 \quad \frac{[\varphi \wedge \psi]^2}{\varphi} (\wedge E_1)}{\perp} (\neg E)}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^2 \quad \frac{\frac{[\neg\psi]^1 \quad \frac{[\varphi \wedge \psi]^3}{\psi} (\wedge E_2)}{\perp} (\neg E)}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^3}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\vee E)^1}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee I)^1$$

□

Satz

$$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \psi \vee \varphi$$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an:

$$\frac{\frac{\varphi \vee \psi \quad \frac{[\varphi]^1}{\psi \vee \varphi}}{\psi \vee \varphi} (\vee E)^1 \quad \frac{[\psi]^1}{\psi \vee \varphi}}{\psi \vee \varphi} (\vee E)^1$$

Satz

Für jede Formel φ ist $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ohne Hypothesen an:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^2 \quad [\neg\varphi]^1}{\perp} (\neg E)}{\varphi} (raa)^1}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)^2$$



Satz

Für jede Formel φ ist $\varphi \vee \neg\varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen an:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^3}{\perp} (\neg I)^1}{\neg\varphi} \quad \frac{\frac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \neg\varphi} (\vee I_1) \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} (\neg E)}{\perp} (\neg I)^2}{\neg\neg\varphi} (\neg E)}{\varphi \vee \neg\varphi} (\text{raa})^3$$

□

Bemerkung

Man kann beweisen, daß jede Deduktion der letzten beiden Theoreme die Regel (raa) verwendet, sie also nicht „intuitionistisch“ gelten (vgl. Folie ca. 4.14).

Satz

$$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Beweis: Wir geben eine Deduktion an

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \vee \neg\varphi}}{\varphi \vee \neg\varphi}}{\neg\psi} (\neg I)^2 \quad \frac{\frac{[\neg\varphi]^1}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee I_1)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee E)^1}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\neg E)}{\frac{\frac{\frac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^2}{\neg\psi} (\neg E)}{\neg\psi} (\neg I)^2} (\vee I_2)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee E)^1$$



Zusammenfassung 2. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Kalkül des natürlichen Schließens als Formalisierung von Argumentationen mittels Formeln der Aussagenlogik

kommende Vorlesung

- exakte Beschreibung der Semantik (d.h. Bedeutung) von Formeln der Aussagenlogik (hierfür gibt es mehr Möglichkeiten, als Sie vielleicht erwarten)