

Korrektheit

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \not\models_W \varphi$? Für welche Wahrheitswertbereiche W ?

Frage für diese Vorlesung

Für welche Wahrheitswertbereiche W gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_W \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist Theorem} \implies \varphi \text{ ist in } W \text{ gültig?}$$

Beispiel

Betrachte den Kleeneschen Wahrheitswertebereich K_3 .

- Sei p atomare Formel.

$$\frac{[p]^4}{p \rightarrow p} (\rightarrow I)^4$$

Also gilt $\emptyset \vdash p \rightarrow p$,
d.h. $p \rightarrow p$ ist Theorem.

- Sei \mathcal{B} K_3 -Belegung mit $\mathcal{B}(p) = 1/2$. Dann gilt
 $\mathcal{B}(p \rightarrow p) = \max(\mathcal{B}(p), 1 - \mathcal{B}(p)) = 1/2$,
also $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \emptyset\} = 1 > 1/2 = \mathcal{B}(p \rightarrow p)$.
Damit haben wir gezeigt $\emptyset \not\models_{K_3} p \rightarrow p$.

Die Implikation

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_W \varphi$$

gilt also NICHT für den Kleeneschen Wahrheitswertebereich $W = K_3$ und damit auch NICHT für den Wahrheitswertebereich der Fuzzy-Logik F .

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich B

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ . Dann gilt $\Gamma \models_B \varphi$, d.h. $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$ für alle passenden B -Belegungen \mathcal{B} .

Beweis: Induktion über die Größe der Deduktion D (d.h. Anzahl der Regelanwendungen).

IA die kleinste Deduktion D hat die Form φ mit Hypothese φ und Konklusion φ . Sei \mathcal{B} passende B -Belegung.

$$\begin{aligned} \text{Hypothesen von } D \text{ in } \Gamma &\implies \varphi \in \Gamma \implies \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi) \\ &\implies \Gamma \models_B \varphi \end{aligned}$$

- IV Behauptung gelte für alle Deduktionen, die kleiner sind als D .
- IS Wir unterscheiden verschiedene Fälle, je nachdem, welche Regel als letzte angewandt wurde.
- (\wedge I) Die Deduktion D hat die Form

$$\frac{\frac{\Gamma}{\alpha} \quad \frac{\Gamma}{\beta}}{\alpha \wedge \beta} (\wedge I)$$

mit $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Sei \mathcal{B} passende B -Belegung. Nach IV gelten

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha) \text{ und } \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\beta)$$

und damit

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha) \wedge_B \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{B}(\varphi).$$

Da \mathcal{B} beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

($\vee E$) Die Deduktion D hat die Form

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \Gamma & \Gamma \cup \{\alpha\} & \Gamma \cup \{\beta\} \\
 \triangle E & \triangle F & \triangle G \\
 \alpha \vee \beta & \varphi & \varphi
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi \quad (\vee E)
 \end{array}$$

Also gibt es Deduktion E mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\alpha \vee \beta$ und Deduktionen F und G mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\alpha\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\beta\}$ und Konklusion φ . Sei \mathcal{B} passende \mathcal{B} -Belegung. Nach IV gelten

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\alpha \vee \beta) \quad (1)$$

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}\} \leq \mathcal{B}(\varphi) \quad (2)$$

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\beta\}\} \leq \mathcal{B}(\varphi) \quad (3)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1 $\mathcal{B}(\alpha) \leq \mathcal{B}(\beta)$:

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \stackrel{(1)}{\leq} \mathcal{B}(\alpha \vee \beta) = \mathcal{B}(\alpha) \vee_B \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\beta)$$

impliziert

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\beta\}\} \stackrel{(3)}{\leq} \mathcal{B}(\varphi)$$

2 $\mathcal{B}(\alpha) > \mathcal{B}(\beta)$: analog

Da \mathcal{B} beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

(\rightarrow I) Die Deduktion D hat die Form

$$\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\alpha \rightarrow \beta} (\rightarrow I)$$

mit $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$. Sei \mathcal{B} eine passende B -Belegung. Nach IV gilt

$$\inf \{ \mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\} \} \leq \mathcal{B}(\beta)$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\alpha) = 0 : \quad \inf \{ \mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \} &\leq 1 = \rightarrow_B (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)) \\ &= \mathcal{B}(\alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{B}(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\alpha) = 1 : \quad \inf \{ \mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \} &= \inf \{ \mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\} \} \\ &\leq \mathcal{B}(\beta) = \rightarrow_B (\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)) \\ &= \mathcal{B}(\alpha \rightarrow \beta) = \mathcal{B}(\varphi) \end{aligned}$$

Da \mathcal{B} beliebig war, habe wir $\Gamma \models_B \varphi$ gezeigt.

(raa) Die Deduktion D hat die Form

$$\frac{\Gamma \psi \quad \Gamma \neg \psi}{\perp} \text{ (raa)}$$

Sei \mathcal{B} eine passende B -Belegung. Nach IV gilt

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\neg\psi\}\} \leq \mathcal{B}(\perp) = 0.$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

- $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 0$: dann gilt $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\psi)$.
- $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} = 1$: Wegen $\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \cup \{\neg\psi\}\} = 0$ folgt $0 = \mathcal{B}(\neg\psi) = \neg_B(\mathcal{B}(\psi))$ und daher $\mathcal{B}(\psi) = 1 \geq \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Da \mathcal{B} beliebig war, haben wir $\Gamma \models_B \psi$ gezeigt.

Ist die letzte Schlußregel in der Deduktion D von der Form $(\wedge I)$, $(\vee E)$, $(\rightarrow I)$ oder (raa) , so haben wir die Behauptung des Lemmas gezeigt. Analog kann dies für die verbleibenden Regeln getan werden. \square

Korrektheitsatz für natürliches Schließen & Wahrheitswertebereich B

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_B \varphi.$$

Beweis: Wegen $\Gamma \vdash \varphi$ existiert eine Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ . Nach dem Korrektheitslemma folgt $\Gamma \models_B \varphi$. \square

Korollar

Jedes Theorem ist im Booleschen Wahrheitswertebereich B gültig.

Korrektheitssatz für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $B_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models_{B_{\mathbb{R}}} \varphi.$$

Beweis:

- 1. Variante: verallgemeinere den Beweis von Korrektheitslemma und Korrektheitssatz für B auf $B_{\mathbb{R}}$
(Problem: wir haben mehrfach ausgenutzt, daß $B = \{0, 1\}$ mit $0 < 1$)
- 2. Variante: Folgerung aus Korrektheitssatz für B . □

Korollar

Jedes Theorem ist auch im Wahrheitswertebereich $B_{\mathbb{R}}$ gültig.

Korrektheitslemma für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ , die die Regel (raa) nicht verwendet. Dann gilt $\Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$.

Beweis: ähnlich zum Beweis des Korrektheitslemmas für den Wahrheitswertebereich B . Nur die Behandlung der Regel (raa) kann nicht übertragen werden. □

Beispiel

Sei p eine atomare Formel.

$$\frac{\neg\neg p \quad [\neg p]^1}{\perp} (\neg E) \\ \frac{\perp}{p} (\text{raa})^1$$

Also gilt $\{\neg\neg p\} \vdash p$, d.h. p ist syntaktische Folgerung von $\neg\neg p$.

Sei \mathcal{B} $H_{\mathbb{R}}$ -Belegung mit $\mathcal{B}(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

\implies (nach Folie 3.22) $\mathcal{B}(\neg\neg p) = \mathbb{R} \not\supseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathcal{B}(p)$

$\implies \neg\neg p \not\vdash_{H_{\mathbb{R}}} p$, d.h., p ist keine $H_{\mathbb{R}}$ -Folgerung von $\neg\neg p$.

Korrektheitsatz für nat. Schließen & Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ohne (raa)} \implies \Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi.$$

Korollar

Jedes (raa)-frei herleitbare Theorem ist im Heytingschen Wahrheitswertebereich $H_{\mathbb{R}}$ gültig.

Folgerung

Jede Deduktion der Theoreme $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ und $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen verwendet (raa).

Beweis: Folien 2.26 und 2.27: diese zwei Formeln sind Theoreme.

Folien 3.21 und 3.23: diese zwei Formeln sind nicht in $H_{\mathbb{R}}$ gültig.

Korollar auf vorheriger Folie: sie sind nicht (raa)-frei herleitbar. □

Vollständigkeit

Können wir durch mathematische Beweise zu allen korrekten Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Formeln und eine Formel φ mit $\Gamma \models_W \varphi$ und $\Gamma \not\vdash \varphi$? Für welche Wahrheitswertebereiche W ?

Frage für diese und die nächste Vorlesung

Für welche Wahrheitswertebereiche W gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist in } W \text{ gültig} \implies \varphi \text{ ist Theorem?}$$

Plan

Sei W einer der Wahrheitswertebereiche $B, K_3, F, B_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}$.

z.z. ist $\Gamma \models_W \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

dies ist äquivalent zu $\Gamma \not\vdash \varphi \implies \Gamma \not\models_W \varphi$.

hierzu gehen wir folgendermaßen vor:

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma \not\models_W \varphi \\ & & \uparrow \text{ (Folie 5.8) } \\ & & \Gamma \not\models_B \varphi \\ & & \updownarrow \text{ (Folie 5.7) } \\ & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\ & & \uparrow \text{ (klar) } \\ & & \Delta \text{ erfüllbar} \\ & \implies & \\ \Gamma \not\vdash \varphi & & \\ \updownarrow \text{ (Folie 4.17) } & & \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \\ \downarrow \text{ (Folie 4.20) } & & \\ \exists \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & \implies & \\ & \text{(Folie 5.2)} & \end{array}$$

Konsistente Mengen

Definition

Sei Γ eine Menge von Formeln.

Γ heißt **inkonsistent**, wenn $\Gamma \vdash \perp$ gilt. Sonst heißt Γ **konsistent**.

Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \not\vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent.}$$

Beweis:

Wir zeigen „ $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent“:

Richtung „ \Rightarrow “, gelte also $\Gamma \vdash \varphi$.

\implies es gibt Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ

\implies Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion \perp :

$$\frac{\frac{\Gamma}{D} \quad \neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$\implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, d.h. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist inkonsistent.

Richtung „ \Leftarrow “, sei also $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent.

\implies Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion \perp .

\implies Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ :

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ (raa)}$$

$\implies \Gamma \vdash \varphi$



Maximal konsistente Mengen

Definition

Eine Formelmeng Δ ist **maximal konsistent**, wenn sie konsistent ist und wenn gilt „ $\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent $\implies \Sigma = \Delta$ “.

Satz

Jede konsistente Formelmeng Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmeng Δ enthalten.

Beweis:

Sei $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ eine Liste aller Formeln (da wir abzählbar viele atomare Formeln haben, gibt es nur abzählbar viele Formeln)

Wir definieren induktiv konsistente Mengen Γ_n :

- Setze $\Gamma_1 = \Gamma$
- Setze $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls diese Menge konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst.} \end{cases}$

Setze nun $\Delta = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n$.

- 1 Wir zeigen indirekt, daß Δ konsistent ist: Angenommen, $\Delta \vdash \perp$.
 \implies Es gibt Deduktion D mit Konklusion \perp und endlicher Menge von Hypothesen $\Delta' \subseteq \Delta$.
 \implies Es gibt $n \geq 1$ mit $\Delta' \subseteq \Gamma_n$
 $\implies \Gamma_n \vdash \perp$, $\not\Leftarrow$ zu Γ_n konsistent. Also ist Δ konsistent.
- 2 Wir zeigen indirekt, daß Δ maximal konsistent ist. Sei also $\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent. Angenommen, $\Sigma \neq \Delta$.
 \implies es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Sigma \setminus \Delta$
 $\implies \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \subseteq \Delta \cup \Sigma = \Sigma$ konsistent.
 $\implies \varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$, ein Widerspruch, d.h. Δ ist max. konsistent. \square

Lemma 1

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

Beweis:

- Zunächst zeigen wir indirekt, daß $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent ist:
Angenommen, $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \perp$.

$\implies \exists$ Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ und Konklusion \perp .

$\Delta \vdash \varphi \implies \exists$ Deduktion E mit Hypothesen in Δ und Konklusion φ .

\implies Wir erhalten die folgende Deduktion:



Also $\Delta \vdash \perp$, ein Widerspruch zur Konsistenz von Δ .

Also ist $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent.

- Da $\Delta \cup \{\varphi\} \supseteq \Delta$ konsistent und Δ maximal konsistent ist, folgt $\Delta = \Delta \cup \{\varphi\}$, d.h. $\varphi \in \Delta$. □

Lemma 2

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt $\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$.

Beweis:

- Zunächst gelte $\neg\varphi \in \Delta$. Angenommen, $\varphi \in \Delta$. Dann haben wir die Deduktion

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

und damit $\Delta \vdash \perp$, was der Konsistenz von Δ widerspricht.

- Gelte nun $\varphi \notin \Delta$.

$\implies \Delta \subsetneq \Delta \cup \{\varphi\} \implies \Delta \cup \{\varphi\}$ inkonsistent (da Δ max. konsistent)

\implies Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ & Konklusion \perp .

\implies Wir erhalten die folgende Deduktion:

$$\frac{\Delta \cup \{\varphi\}}{\perp} (\neg I)$$

$\implies \Delta \vdash \neg\varphi \implies \neg\varphi \in \Delta$ (nach Lemma 1) □

Zusammenfassung 4. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Korrektheit des natürlichen Schließens: alle abgeleiteten Formeln sind im Booleschen Wahrheitswertebereich B gültig.
- Plan für Beweis, daß alle in B gültigen Formeln abgeleitet werden können. Hierzu: $\Gamma \Vdash \varphi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

kommende Vorlesung

- Übergang zur Semantik-Spalte in unserem Plan auf Folie 4.16, d.h. Vervollständigung des Beweises, daß alle in B gültigen Formeln abgeleitet werden können.
- Diverse Folgerungen:
 - Entscheidbarkeit der Ableitbarkeit
 - Für jede semantische Folgerung reichen endlich viele Voraussetzungen.