

Erfüllbarkeitsproblem

Eingabe: Formel γ

Frage: existiert eine B -Belegung B mit $B(\gamma) = 1_B$.

offensichtlicher Algorithmus: probiere alle Belegungen durch (d.h. stelle Wahrheitstabelle auf) \rightarrow exponentielle Zeit

„Automaten, Sprachen und Komplexität“: das Problem ist NP-vollständig

nächstes Ziel: spezielle Algorithmen für syntaktisch eingeschränkte Formeln γ

Spätere Verallgemeinerung dieser Algorithmen (letzte Vorlesung des Logik-Teils von „Logik und Logikprogrammierung“) bildet Grundlage der logischen Programmierung.

Definition

- Eine **Hornklausel** hat die Form

$$(\neg \perp \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

für $n \geq 0$, atomare Formeln p_1, p_2, \dots, p_n und q atomare Formel oder $q = \perp$.

- Eine **Hornformel** ist eine Konjunktion von Hornklauseln.

Schreib- und Sprechweise

- $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow q$ für Hornklausel $(\neg \perp \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$
insbes. $\emptyset \rightarrow q$ für $\neg \perp \rightarrow q$
- $\{(M_i \rightarrow q_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ für Hornformel $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (M_i \rightarrow q_i)$

Bemerkung

In der Literatur auch:

- $\{\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n, q\}$ für $\{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow q$ mit q atomare Formel
- $\{\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n\}$ für $\{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \perp$
- \square für $\emptyset \rightarrow \perp$, die „leere Hornklausel“

Markierungsalgorithmus

Eingabe: eine endliche Menge Γ von Hornklauseln.

- (1) while es gibt in Γ eine Hornklausel $M \rightarrow q$, so daß alle $p \in M$ markiert sind und q unmarkierte atomare Formel ist
do markiere q (in allen Hornklauseln in Γ)
- (2) if Γ enthält eine Hornklausel der Form $M \rightarrow \perp$, in der alle $p \in M$ markiert sind
then return „unerfüllbar“
else return „erfüllbar“

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.27)

Ziel ist es, die folgende Folgerung zu zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL\} \models_B \neg AK$$

Lemma auf Folie 5.7: man muß Unerfüllbarkeit der folgenden Menge zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL, \neg \neg AK\}$$

Dies ist keine Menge von Hornklauseln ☹!

Idee: ersetze BK durch $\neg BH$ in allen Formeln.

Ergebnis:

- Aus $AK \vee BK$ wird $\neg BH \vee AK \equiv BH \rightarrow AK \equiv \{BH\} \rightarrow AK$.
- Aus $AK \rightarrow BK$ wird $AK \rightarrow \neg BH \equiv \neg AK \vee \neg BH \equiv AK \wedge BH \rightarrow \perp \equiv \{AK, BH\} \rightarrow \perp$.
- Aus $BK \wedge RL \rightarrow \neg AK$ wird $\neg BH \wedge RL \rightarrow \neg AK \equiv BH \vee \neg RL \vee \neg AK \equiv RL \wedge AK \rightarrow BH \equiv \{RL, AK\} \rightarrow BH$
- $RL \equiv (\emptyset \rightarrow RL)$
- $\neg \neg AK \equiv (\emptyset \rightarrow AK)$

Wir müssen also zeigen, daß die folgende Menge von Hornklauseln unerfüllbar ist:

$$\{\{BH\} \rightarrow AK, \{AK, BH\} \rightarrow \perp, \{RL, AK\} \rightarrow BH, \emptyset \rightarrow RL, \emptyset \rightarrow AK\}$$

Der Markierungsalgorithmus geht wie folgt vor:

- 1. Runde: markiere RL aufgrund der Hornklausel $\emptyset \rightarrow RL$
- 2. Runde: markiere AK aufgrund der Hornklausel $\emptyset \rightarrow AK$
- 3. Runde: markiere BH aufgrund der Hornklausel $\{RL, AK\} \rightarrow BH$

dann sind keine weiteren Markierungen möglich.

In der Hornklausel $\{AK, BH\} \rightarrow \perp$ sind alle atomaren Formeln aus $\{AK, BH\}$ markiert. Also gibt der Algorithmus aus, daß die Menge von Hornklauseln nicht erfüllbar ist.

Nach unserer Herleitung folgern wir, daß das Teil A heil ist (in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen auf Folien 1.27 bzw. 3.19).

(A) Der Algorithmus terminiert:

in jedem Durchlauf der while-Schleife wird wenigstens eine atomare Formel markiert. Nach endlich vielen Schritten terminiert die Schleife also.

(B) Wenn der Algorithmus eine atomare Formel q markiert und wenn \mathcal{B} eine B -Belegung ist, die Γ erfüllt, dann gilt $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

Beweis: wir zeigen induktiv über n : Wenn q in einem der ersten n Schleifendurchläufe markiert wird, dann gilt $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

IA Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 0$.

IS werde die atomare Formel q in einem der ersten n Schleifendurchläufe markiert.

Dann gibt es eine Hornklausel $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \rightarrow q$, so daß p_1, \dots, p_k in den ersten $n - 1$ Schleifendurchläufen markiert wurden.

Also gilt $\mathcal{B}(p_1) = \dots = \mathcal{B}(p_k) = 1_B$ nach IV.

Da \mathcal{B} alle Hornformeln aus Γ erfüllt, gilt insbesondere $\mathcal{B}(\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \rightarrow q) = 1_B$ und damit $\mathcal{B}(q) = 1_B$.

(C) Wenn der Algorithmus „unerfüllbar“ ausgibt, dann ist Γ unerfüllbar.

Beweis: indirekt, wir nehmen also an, daß der Algorithmus „unerfüllbar“ ausgibt, \mathcal{B} aber eine B -Belegung ist, die Γ erfüllt.

Sei $\{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \perp$ die Hornklausel aus Γ , die die Ausgabe „unerfüllbar“ verursacht (d.h. die atomaren Formeln p_1, \dots, p_k sind markiert).

Nach (B) gilt $\mathcal{B}(p_1) = \dots = \mathcal{B}(p_k) = 1_B$, also $\mathcal{B}(\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \rightarrow \perp) = 0_B$ im Widerspruch zur Annahme, daß \mathcal{B} alle Hornklauseln aus Γ erfüllt.

Also kann es keine erfüllende B -Belegung von Γ geben.

- (D) Wenn der Algorithmus „erfüllbar“ ausgibt, dann erfüllt die folgende B -Belegung alle Formeln aus Γ :

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} 1_B & \text{der Algorithmus markiert } p_i \\ 0_B & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei $M \rightarrow q$ eine beliebige Hornklausel aus Γ .

- Ist ein $p \in M$ nicht markiert, so gilt $\mathcal{B}(\bigwedge_{p \in M} p) = 0_B$ und damit $\mathcal{B}(M \rightarrow q) = 1_B$.
- Sind alle $p \in M$ markiert, so wird auch q markiert, also $\mathcal{B}(q) = 1_B$ und damit $\mathcal{B}(M \rightarrow q) = 1_B$.
- Gilt $q = \perp$, so existiert unmarkiertes $p \in M$ (da der Algorithmus sonst „unerfüllbar“ ausgegeben hätte), also $\mathcal{B}(M \rightarrow \perp) = 1_B$ wie im ersten Fall.

Also gilt $\mathcal{B}(M \rightarrow q) = 1_B$ für alle Hornklauseln aus Γ , d.h. Γ ist erfüllbar.

Satz

Sei Γ endliche Menge von Hornklauseln. Dann terminiert der Markierungsalgorithmus mit dem korrekten Ergebnis.

Beweis: Die Aussagen (A)-(D) beweisen diesen Satz. □

Bemerkungen:

- Mit einer geeigneten Implementierung läuft der Algorithmus in linearer Zeit.
- Wir haben sogar gezeigt, daß bei Ausgabe von „erfüllbar“ eine erfüllende B -Belegung berechnet werden kann.

SLD-Resolution

Definition

Sei Γ eine Menge von Hornklauseln. Eine **SLD-Resolution** aus Γ ist eine Folge $(M_0 \rightarrow \perp, M_1 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \rightarrow \perp) \in \Gamma$
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \rightarrow q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$

Beispiel

$$\Gamma = \{ \{BH\} \rightarrow AK, \{AK, BH\} \rightarrow \perp, \{RL, AK\} \rightarrow BH, \emptyset \rightarrow RL, \emptyset \rightarrow AK \}$$

$$M_0 = \{AK, BH\}$$

$$M_1 = M_0 \setminus \{BH\} \cup \{RL, AK\} = \{RL, AK\}$$

$$M_2 = M_1 \setminus \{RL\} \cup \emptyset = \{AK\}$$

$$M_3 = M_2 \setminus \{AK\} \cup \emptyset = \emptyset$$

Lemma A

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln und $(M_0 \rightarrow \perp, M_1 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ eine SLD-Resolution aus Γ mit $M_m = \emptyset$. Dann ist Γ nicht erfüllbar.

Beweis: indirekt: angenommen, es gibt B -Belegung \mathcal{B} mit $\mathcal{B}(N \rightarrow q) = 1_B$ für alle $(N \rightarrow q) \in \Gamma$.

Wir zeigen für alle $0 \leq n \leq m$ per Induktion über n :

$$\text{es gibt } p \in M_n \text{ mit } \mathcal{B}(p) = 0_B \quad (4)$$

IA $n = 0$: $(M_0 \rightarrow \perp, \dots)$ SLD-Resolution $\Rightarrow (M_0 \rightarrow \perp) \in \Gamma$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(M_0 \rightarrow \perp) = 1_B$$

$$\Rightarrow \text{es gibt } p \in M_0 \text{ mit } \mathcal{B}(p) = 0_B$$

IV sei $n < m$ und $p \in M_n$ mit $\mathcal{B}(p) = 0_B$

IS $(\dots, M_n \rightarrow \perp, M_{n+1} \rightarrow \perp, \dots)$ SLD-Resolution

\Rightarrow es gibt $(N \rightarrow q) \in \Gamma$ mit $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$ und $q \in M_n$

zwei Fälle werden unterschieden:

1. $p \neq q$: dann gilt $p \in M_{n+1}$ mit $\mathcal{B}(p) = 0_B$

2. $p = q$: $(N \rightarrow q) \in \Gamma \implies \mathcal{B}(N \rightarrow q) = 1_B$

$\xrightarrow{\mathcal{B}(q)=0_B}$ es gibt $p' \in N \subseteq M_{n+1}$ mit $\mathcal{B}(p') = 0_B$

in jedem der zwei Fälle gilt also (4) für $n + 1$.

Damit ist der induktive Beweis von (4) abgeschlossen.

Mit $m = n$ haben wir insbesondere

$$\text{es gibt } p \in M_m \text{ mit } \mathcal{B}(p) = 0_B$$

im Widerspruch zu $M_m = \emptyset$.

Damit ist der indirekte Beweis abgeschlossen. □

Lemma B

Sei Γ eine (u.U. unendliche) unerfüllbare Menge von Hornklauseln. Dann existiert eine SLD-Resolution $(M_0 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ aus Γ mit $M_m = \emptyset$.

Beweis:

Endlichkeitssatz (Folie 5.21): es gibt $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich und unerfüllbar.

Satz auf Folie 6.11: bei Eingabe von Δ terminiert Markierungsalgorithmus mit „unerfüllbar“

$r \geq 0$... Anzahl der Runden

q_i ... Atomformel, die in Runde i markiert wird ($1 \leq i \leq r$)

Behauptung: Es gibt $m \leq r$ und SLD-Resolution $(M_0 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ aus Δ mit $M_m = \emptyset$ und

$$M_n \subseteq \{q_1, q_2, \dots, q_{r-n}\} \text{ f.a. } 0 \leq n \leq m. \quad (5)$$

Beweis der Behauptung: Wir konstruieren die Hornklauseln $M_i \rightarrow \perp$ induktiv:

- IA Da der Markierungsalgorithmus mit „unerfüllbar“ terminiert, existiert eine Hornklausel $(M_0 \rightarrow \perp) \in \Gamma$ mit $M_0 \subseteq \{q_1, \dots, q_{r-0}\}$.
 $(M_0 \rightarrow \perp)$ ist SLD-Resolution aus Δ , die (5) erfüllt.
- IV Sei $n \leq r$ und $(M_0 \rightarrow \perp, \dots, M_n \rightarrow \perp)$ SLD-Resolution, so daß (5) gilt.
- IS wir betrachten drei Fälle:
 1. Fall $M_n = \emptyset$: mit $m := n$ ist Beweis der Beh. abgeschlossen.
 2. Fall $n = r$: Nach (5) gilt $M_n \subseteq \{q_1, \dots, q_{r-n}\} = \emptyset$.
Mit $m := n$ ist der Beweis der Beh. abgeschlossen.
 3. Fall $n < r$ und $M_n \neq \emptyset$. Sei k maximal mit $q_k \in M_n \subseteq \{q_1, q_2, \dots, q_{r-n}\}$.
Also existiert $(N \rightarrow q_k) \in \Delta$, so daß $N \subseteq \{q_1, \dots, q_{k-1}\}$. Setze
 $M_{n+1} = M_n \setminus \{q_k\} \cup N \subseteq \{q_1, \dots, q_{k-1}\} \subseteq \{q_1, \dots, q_{r-(n+1)}\}$.

Damit ist der induktive Beweis der Beh. abgeschlossen, woraus das Lemma unmittelbar folgt. □

Satz

Sei Γ eine (u.U. unendliche) Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent:

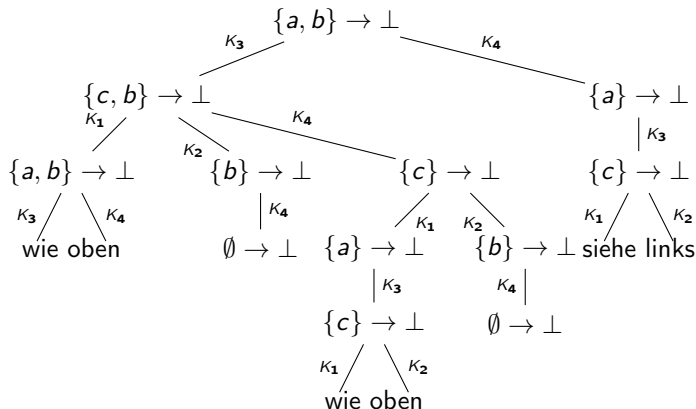
- 1) Γ ist nicht erfüllbar.
- 2) Es gibt eine SLD-Resolution $(M_0 \rightarrow \perp, M_1 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ aus Γ mit $M_m = \emptyset$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Lemmata A und B. □

Beispiel

$$\Gamma = \underbrace{\{\{a, b\} \rightarrow \perp\}}_{K_0}, \underbrace{\{\{a\} \rightarrow c\}}_{K_1}, \underbrace{\{\{b\} \rightarrow c\}}_{K_2}, \underbrace{\{\{c\} \rightarrow a\}}_{K_3}, \underbrace{\{\emptyset \rightarrow b\}}_{K_4}$$

alle SLD-Resolutionen aus Γ kann man durch einen Baum beschreiben:



Die Suche nach einer SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen:

- Breitensuche:
 - findet SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
 - hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe n kann es Niveaus der Größe 2^n geben)
- Tiefensuche:
 - geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe n hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
 - findet existierende SLD-Resolution mit $M_m = \emptyset$ nicht immer (siehe Beispiel)

Zusammenfassung Aussagenlogik

- Das natürliche Schließen formalisiert die „üblichen“ Argumente in mathematischen Beweisen.
- Unterschiedliche Wahrheitswertebereiche formalisieren unterschiedliche Vorstellungen von „Wahrheit“.
- Das natürliche Schließen ist vollständig und korrekt für den Booleschen Wahrheitswertebereich.
- Der Markierungsalgorithmus und die SLD-Resolution sind praktikable Verfahren, um die Erfüllbarkeit von Hornformeln zu bestimmen.