Definition

Sei Σ eine Signatur, φ eine Σ-Formel und Δ eine Menge von Σ-Formeln.

- Δ ist erfüllbar, wenn es Σ-Struktur $\mathcal{B}$ und Variableninterpretation $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{B}}$ gibt mit $\mathcal{B} \models_\rho \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.
- φ ist semantische Folgerung von Δ ($\Delta \models \varphi$) falls für alle Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{B}}$ gilt:

  $$\text{Gilt } \mathcal{B} \models_\rho \psi \text{ für alle } \psi \in \Delta, \text{ so gilt auch } \mathcal{B} \models_\rho \varphi\,.$$

- φ ist allgemeingültig, falls $\mathcal{B} \models_\rho \varphi$ für alle Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt.

Bemerkung

φ allgemeingültig gdw. $\emptyset \models \varphi$ gdw. $\{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar
Hierfür schreiben wir auch $\models \varphi$.

Beispiel

Die Aussage $\varphi = \big(\forall x\colon R(x) \to \forall x\colon R\big(f(x)\big)\big)$ ist allgemeingültig.

Beweis: Sei Σ Signatur, so daß φ Σ-Formel ist. Sei $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Falls $\mathcal{A} \not\models_\rho \forall x\, R(x)$, so gilt $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.
2. Wir nehmen nun $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, R(x)$ an.
   Sei $a \in U_\mathcal{A}$ beliebig und $b = f^\mathcal{A}(a)$.
   $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, R(x)$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto b]} R(x)$
   $\Longrightarrow R^\mathcal{A} \ni \big(\rho[x \mapsto b]\big)(x) = b = f^\mathcal{A}(a) = \big(\rho[x \mapsto a]\big)(f(x))$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} R\big(f(x)\big)$.
   Da $a \in U_\mathcal{A}$ beliebig war, haben wir also $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\colon R\big(f(x)\big)$.
   Also gilt auch in diesem Fall $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

Da $\mathcal{A}$ und ρ beliebig waren, ist φ somit allgemeingültig. $\square$

Beispiel

Die Aussage $\varphi = \exists x\Big(R(x) \to R\big(f(x)\big)\Big)$ ist allgemeingültig.

Beweis: Sei Σ Signatur, so daß φ Σ-Formel ist. Sei $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation. Wir betrachten wieder zwei Fälle:

1. Angenommen, $R^{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}$. Wegen $U_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ existiert ein $a \in U_{\mathcal{A}}$.
   $\Longrightarrow f^{\mathcal{A}}(a) \in R^{\mathcal{A}}$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R\big(f(x)\big)$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(x) \to R\big(f(x)\big)$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$.
2. Ansonsten existiert $a \in U_{\mathcal{A}} \setminus R^{\mathcal{A}}$.
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \not\models_{\rho[x \mapsto a]} R(x)$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} R(x) \to R\big(f(x)\big)$
   $\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$.

Da $\mathcal{A}$ und ρ beliebig waren, ist φ somit allgemeingültig. $\square$

Aufgabe

a: allgemeingültig e: erfüllbar u: unerfüllbar

	a	e	u
$P(a)$			
$\exists x\colon (\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \to \exists x\colon P(x)$			
$P(x) \to \exists x\colon P(x)$			
$\forall x\colon P(x) \to \exists x\colon P(x)$			
$\forall x\colon P(x) \wedge \neg\forall y\colon P(y)$			
$\forall x\colon (P(x,x) \to \exists x\,\forall y\colon P(x,y))$			
$\forall x\,\forall y\colon (x = y \to f(x) = f(y))$			
$\forall x\,\forall y\colon (f(x) = f(y) \to x = y)$			
$\exists x\,\exists y\,\exists z\colon (f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			
$\exists x\,\forall x\colon Q(x,x)$			

Substitutionen

Definition

Eine Substitution besteht aus einer Variable $x \in \mathrm{Var}$ und einem Term $t \in T_\Sigma$, geschrieben $[x := t]$.

Die Formel $\varphi[x := t]$ ist das Ergebnis der Anwendung der Substitution $[x := t]$ auf die Formel φ. Sie entsteht aus φ, indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden. *Sie soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.*

Dazu definieren wir zunächst induktiv, was es heißt, die freien Vorkommen von x im Term $s \in T_\Sigma$ zu ersetzen:

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = y$ für $y \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$
- $\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big)[x := t] = f\big(t_1[x := t], \ldots, t_k[x := t]\big)$
  für $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$

Lemma

Seien Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \mathrm{Var}$ und $s, t \in T_{\Sigma}$. Dann gilt

$$\rho\big(s[x := t]\big) = \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big](s)\,.$$

Beweis: Induktion über den Aufbau des Terms s (mit $\rho' = \rho[x \mapsto \rho(t)]$):

- $s = x$: $\rho\big(s[x := t]\big) = \rho(t) = \rho'(x) = \rho'(s)$
- $s \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$: $\rho\big(s[x := t]\big) = \rho(s) = \rho'(s)$
- $s = f(t_1, \ldots, t_k)$:

$$\begin{aligned}
\rho\Big(\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big)[x := t]\Big) &= \rho\Big(f\big(t_1[x := t], \ldots, t_k[x := t]\big)\Big) \\
&= f^{\mathcal{A}}\Big(\rho\big(t_1[x := t]\big), \ldots, \rho\big(t_k[x := t]\big)\Big) \\
&\overset{\text{IV}}{=} f^{\mathcal{A}}\big(\rho'(t_1), \ldots, \rho'(t_k)\big) \\
&= \rho'\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big) = \rho'(s)
\end{aligned}$$

$\square$

Die Definition von $s[x := t]$ kann induktiv auf Σ-Formeln fortgesetzt werden:

- $(t_1 = t_2)[x := t] = \big(t_1[x := t] = t_2[x := t]\big)$ für $t_1, t_2 \in T_\Sigma$
- $\big(R(t_1, \dots, t_k)\big)[x := t] = R\big(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t]\big)$
  für $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$
- $\bot[x := t] = \bot$

Für Σ-Formeln φ und ψ und $y \in \mathrm{Var}$:

- $(\varphi \Box \psi)[x := t] = \varphi[x := t] \Box \psi[x := t]$ für $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $(\neg\varphi)[x := t] = \neg\big(\varphi[x := t]\big)$
- $(Qy\,\varphi)[x := t] = \begin{cases} Qy\,\varphi[x := t] & \text{falls } x \neq y \\ Qy\,\varphi & \text{falls } x = y \end{cases}$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Beispiel:

$$\Big(\exists x\, P\big(x, f(y)\big) \vee \neg\forall y\, Q\Big(y, g\big(a, h(z)\big)\Big)\Big)[y := f(u)]$$

$$= \Big(\exists x\, P\Big(x, f\big(f(u)\big)\Big) \vee \neg\forall y\, Q\Big(y, g\big(a, h(z)\big)\Big)\Big)$$

Folie 8.5: $\varphi[x := t]$ „soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.“

Gegenbeispiel:

Aus der Formel

$$\exists y\, \mathsf{Mutter}(x) = y \quad (\text{„}x \text{ hat eine Mutter“})$$

wird mit der Substitution $[x := \mathsf{Vater}(y)]$ die Formel

$$\exists y\, \mathsf{Mutter}\big(\mathsf{Vater}(y)\big) = y$$

(„es gibt eine Person y, die Mutter ihres eigenen Vaters ist“).

Definition

Sei $[x := t]$ Substitution und φ Σ-Formel.
Die Substitution $[x := t]$ heißt für φ zulässig, wenn für alle $y \in \mathrm{Var}$ gilt:

$$y \text{ Variable in } t \implies \varphi \text{ enthält weder } \exists y \text{ noch } \forall y$$

Lemma

Sei Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \mathrm{Var}$ und $t \in T_\Sigma$.
Ist die Substitution $[x := t]$ für die Σ-Formel φ zulässig, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi[x := t] \iff \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi\,.$$

Beweis: Induktion über den Aufbau der Formel φ (mit $\rho' = \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big]$):

- $\varphi = (s_1 = s_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho (s_1 = s_2)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_\rho s_1[x := t] = s_2[x := t] \\
&\iff \rho\big(s_1[x := t]\big) = \rho\big(s_2[x := t]\big) \\
&\overset{(*)}{\iff} \rho'(s_1) = \rho'(s_2) \\
&\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} s_1 = s_2
\end{aligned}$$

  $(*)$ . . . Folie 8.6
- andere atomare Formeln analog

- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[x := t] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \varphi_1[x := t] \wedge \varphi_2[x := t] \\
&\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \varphi_1[x := t] \\
&\qquad\quad \text{und } \mathcal{A} \models_\rho \varphi_2[x := t] \\
&\overset{(*)}{\iff} \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \text{ und } \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_2 \\
&\iff \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \wedge \varphi_2
\end{aligned}$$

(*) nach IV da $[x := t]$ auch für φ_1 und φ_2 zulässig ist

- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ und $\varphi = \neg\psi$ analog

- $\varphi = \forall y\, \psi$:
  Wir betrachten zunächst den Fall $x = y$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho (\forall x\, \psi)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \psi \\ &\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall x\, \psi \text{ (denn } x \notin FV(\forall x\, \psi)) \end{aligned}$$

Jetzt der Fall $x \neq y$:

Für $a \in U_\mathcal{A}$ setze $\rho_a = \rho[y \mapsto a]$. Da $[x := t]$ für φ zulässig ist, kommt y in t nicht vor. Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_a[x \mapsto \rho_a(t)] &= \rho_a\big[x \mapsto \rho(t)\big] \text{ da } y \text{ nicht in } t \text{ vorkommt} \\ &= \rho[y \mapsto a]\big[x \mapsto \rho(t)\big] \\ &= \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big][y \mapsto a] \text{ da } x \neq y \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho (\forall y\, \psi)[x := t] &\iff \mathcal{A} \models_\rho \forall y \left(\psi[x := t]\right) \text{ (wegen } x \neq y\text{)} \\
&\iff \mathcal{A} \models_{\rho_a} \psi[x := t] \text{ für alle } a \in U_\mathcal{A} \\
&\overset{\text{IV}}{\iff} \mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(t)]} \psi \text{ für alle } a \in U_\mathcal{A} \\
&\overset{\text{s.o.}}{\iff} \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)][y \mapsto a]} \psi \text{ für alle } a \in U_\mathcal{A} \\
&\iff \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \forall y\, \psi \\
&\iff \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall y\, \psi
\end{aligned}$$

- $\varphi = \exists y\, \psi$: analog $\square$

Wir haben Regeln des natürlichen Schließens für aussagenlogische Formeln untersucht und für gut befunden. Man kann sie natürlich auch auf prädikatenlogische Formeln anwenden.

Beispiel

Für alle Σ-Formel φ und ψ gibt es eine Deduktion mit Hypothesen in $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\}$ und Konklusion $\neg(\varphi \vee \psi)$:

$$
\dfrac{\dfrac{[\varphi \vee \psi]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi}\,(\wedge\mathsf{E}_1) \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,(\neg\mathsf{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\psi}\,(\wedge\mathsf{E}_1) \qquad [\psi]^1}{\bot}\,(\neg\mathsf{E})}{\bot}\,(\vee\mathsf{E})^1}{\neg(\varphi \vee \psi)}\,(\neg\mathsf{I})^2
$$

Korrektheit

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Σ-Formeln und eine Σ-Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \not\models \varphi$?

Frage (vgl. Folie 4.1)

Gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist Theorem} \implies \varphi \text{ ist allgemeingültig?}$$

Der Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen (vgl. Folie 4.3) kann ohne große Schwierigkeiten erweitert werden. Man erhält

Lemma V0

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Umgekehrt ist nicht zu erwarten, daß aus $\Gamma \models \varphi$ folgt, daß es eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ gibt, denn die bisher untersuchten Regeln erlauben keine Behandlung von $=$, $\forall$ bzw. $\exists$. Solche Regeln werden wir jetzt einführen.

Zunächst kümmern wir uns um Atomformeln der Form $t_1 = t_2$. Hierfür gibt es die zwei Regeln (R) und (GfG):

Reflexivität (ausführlich)

Für jeden Term t ist

$$\frac{}{t = t}$$

eine hypothesenlose Deduktion mit Konklusion $t = t$.

Reflexivität (Kurzform)

$$\frac{}{t = t}\,(\mathrm{R})$$

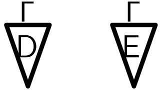
Gleiches-für-Gleiches in mathematischen Beweisen

„Zunächst zeige ich, daß s die Eigenschaft φ hat: ...
Jetzt zeige ich $s = t$: ...
Also haben wir gezeigt, daß t die Eigenschaft φ hat. qed“

Gleiches-für-Gleiches (ausführlich)

Seien s und t Terme und φ Formel, so daß die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig sind.

Sind D und E Deduktionen mit Hypothesen in Γ und Konklusionen $\varphi[x := s]$ bzw. $s = t$, so ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$:



$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}$$

Gleiches-für-Gleiches (Kurzform)

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]} \text{(GfG)}$$

Bedingung: über keine Variable aus s oder t wird in φ quantifiziert

Die folgenden Beispiele zeigen, daß wir bereits jetzt die üblichen Eigenschaften der Gleichheit (Symmetrie, Transitivität, Einsetzen) folgern können.

Beispiel

Seien x Variable, s Term ohne x und $\varphi = (x = s)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (s = s)$ und $\varphi[x := t] = (t = s)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\dfrac{\dfrac{}{s = s}\,(\mathrm{R}) \qquad s = t}{t = s}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme s und t haben wir also

$$\{s = t\} \vdash t = s\,.$$

Beispiel

Seien x Variable, r, s und t Terme ohne x und $\varphi = (r = x)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (r = s)$ und $\varphi[x := t] = (r = t)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\frac{r = s \quad s = t}{r = t}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme r, s und t haben wir also

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t\,.$$

Beispiel

Seien x Variable, s und t Terme ohne x, f einstelliges Funktionssymbol und $\varphi = \big(f(s) = f(x)\big)$.

Da φ quatorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = \big(f(s) = f(s)\big)$ und $\varphi[x := t] = \big(f(s) = f(t)\big)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\dfrac{\dfrac{}{f(s) = f(s)}\,(\mathrm{R}) \qquad s = t}{f(s) = f(t)}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme s und t haben wir also

$$\{s = t\} \vdash f(s) = f(t)\,.$$

Zusammenfassung 8. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Erfüllbarkeit, semantische Folgerung, Allgemeingültigkeit
- Substitutionen
- erste Regeln des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik

kommende Vorlesung

- weitere Regeln des natürlichen Schließens
- Korrektheitssatz und Vollständigkeitssatz für das natürliche Schließen und die Prädikatenlogik