Pränexform

Ziel: Berechnung einer äquivalenten Formel, in der alle Quantoren am Anfang stehen.

Definition

Eine Σ-Formel ist in Pränexform, wenn sie die Gestalt

$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \, \ldots Q_k x_k : \varphi$$

hat mit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k \in \{\exists, \forall\}$, x_i paarweise verschieden und φ quantorenfrei.

Definition

Zwei Σ-Formeln φ und ψ sind äquivalent (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi \iff \mathcal{A} \models_\rho \psi \, .$$

Idee: Ziehe alle Quantoren nach vorne,
ersetze z.B. $\alpha \wedge \exists x\colon \beta$ durch $\exists x\colon (\alpha \wedge \beta)$

Beispiel

- $\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \exists x\colon \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = x$ wird zu
  $\exists x\colon \big(\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = x\big)$
  Lösung: neue Variable y, die nicht in α vorkommt
  $\rightsquigarrow \exists y\colon \big(\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y\big)$
- $\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \exists x\colon \mathrm{Mutter}(x) = y$ wird zu
  $\exists y\colon \big(\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \mathrm{Mutter}(y) = y\big)$
  Lösung: neue Variable, die auch nicht in β vorkommt
  $\rightsquigarrow \exists y'\colon (\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \mathrm{Mutter}(y') = y)$
- $\neg\forall y\colon \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y$ wird zu $\forall y\colon \neg\mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y$
  Lösung: vertausche Quantoren $\rightsquigarrow \exists y\colon \neg\mathrm{Mutter}(x) = y$
- $\exists x\colon \big(\mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit} \rightarrow \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})\big)$ entsteht aus
  $\big(\exists x\colon \mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit}\big) \rightarrow \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})$
  Lösung: vertausche auch hier Quantoren
  $\rightsquigarrow \forall x\colon \big(\mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit} \rightarrow \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})\big)$

Lemma

Seien $Q \in \{\exists, \forall\}$ und $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.
Sei $\varphi = \alpha \oplus Qx\,\beta$ und sei y eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt. Dann gilt

$$\varphi \equiv \begin{cases} Qy\,(\alpha \oplus \beta[x := y]) & \textit{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\ \forall y\,(\alpha \leftarrow \beta[x := y]) & \textit{falls } \oplus = \leftarrow, Q = \exists \\ \exists y\,(\alpha \leftarrow \beta[x := y]) & \textit{falls } \oplus = \leftarrow, Q = \forall \end{cases}$$

Weiterhin gelten

$$\neg\forall x\colon \alpha \equiv \exists x\colon \neg\alpha \;\textit{ und }\; \neg\exists x\colon \alpha \equiv \forall x\colon \neg\alpha\,.$$

Beweis: (für den Fall $Q = \exists$ und $\oplus = \wedge$)
Seien $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation.
Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ setze $\rho_a := \rho[y \mapsto a]$.
Dann gilt

$$\rho_a\big[x \mapsto \rho_a(y)\big](z) = \rho[x \mapsto a](z) \text{ für alle } z \neq y \qquad (*)$$

Wir erhalten also

$\mathcal{A} \models_\rho (\alpha \wedge \exists x\, \beta)$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$ und $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\, \beta$

$\iff$ (es gilt $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$) und (es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit ($\mathcal{A} \models_\rho \alpha$ und $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \alpha$ (da y in α nicht vorkommt)
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(y)]} \beta$ (nach (*), da y in β nicht vorkommt)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \alpha$
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \beta[x := y]$ (Folie 8.10)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a]} \alpha \wedge \beta[x := y]$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho \exists y \left(\alpha \wedge \beta[x := y]\right)$

Die Fälle $Q = \forall$ bzw. $\oplus = \vee$ werden analog behandelt.

Der Fall $\oplus = \leftarrow$, $Q = \exists$:

$$
\begin{aligned}
\alpha \leftarrow (\exists x\, \beta) &\equiv \alpha \vee \neg(\exists x\, \beta) \\
&\equiv \alpha \vee \neg(\neg \forall x\, \neg\beta) \\
&\equiv \alpha \vee (\forall x\, \neg\beta) \\
&\equiv \forall y\, \big(\alpha \vee \neg\beta[x := y]\big) \\
&\equiv \forall y\, \big(\alpha \leftarrow \beta[x := y]\big)
\end{aligned}
$$

Die restlichen Fälle sind analog. □

Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Σ-Formel φ kann eine äquivalente Σ-Formel in Pränexform berechnet werden.

Ist φ gleichungsfrei, so ist auch φ' gleichungsfrei.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über den Aufbau von φ:
I.A. φ ist atomare Formel: Setze $\varphi' = \varphi$.

I.S.

- $\varphi = \neg\psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Mit $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$ setze

$$\varphi' = \overline{Q_1} x_1\, \overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_m}\, x_m\, \neg\psi'\,.$$

- $\varphi = \exists x\, \psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Setze

$$\varphi' = \begin{cases} \exists x\, Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{falls } x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \\ Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Nach I.V. können Formeln in Pränexform

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0 \\ \beta &\equiv Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{aligned}$$

berechnet werden. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$ neue Variable.

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha \wedge \beta \\ &\equiv (Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0) \wedge (Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0) \\ &\equiv Q_1 z_1 \left(\begin{array}{cl} & (Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0)[x_1 := z_1] \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{array} \right) \\ &= Q_1 z_1 \left(\begin{array}{cl} & Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_1 \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{array} \right) \\ &\qquad \text{mit } \alpha_1 = \alpha_0[x_1 := z_1] \\ &\vdots \\ &\equiv Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m\, Q'_1 z_{m+1} \ldots Q'_n z_{m+n}\, (\alpha_m \wedge \beta_n) \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x\, \psi$: analog zum Fall $\varphi = \exists x\, \psi$
- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$
- $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$ (es ändern sich die Quantoren in α!) $\square$

Skolemform

Ziel: Berechnung einer erfüllbarkeitsäquivalenten Formel in Skolemform aus einer Formel in Pränexform

Definition

Eine Σ-Formel ist in Skolemform, wenn sie die Gestalt

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \forall x_k : \varphi$$

hat mit x_i paarweise verschieden und φ quantorenfrei.

Idee:

$$\forall x \exists y : \, (\mathrm{befreundet}(x, y) \wedge \mathrm{weiblich}(y))$$

besagt „Jeder Mensch hat eine Freundin", d.h. es gibt eine Funktion Freundin mit $\forall x : \, \Big(\mathrm{befreundet}\big(x, \mathrm{Freundin}(x)\big) \wedge \mathrm{weiblich}\big(\mathrm{Freundin}(x)\big)\Big)$

Konstruktion: Sei $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists y \, \psi$ Formel in Pränexform (u.U. enthält ψ weitere Quantoren).

Sei $g \notin \mathrm{Fun}$ ein neues m-stelliges Funktionssymbol.

Setze $\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \, \psi\big[y := g(x_1, \dots, x_m)\big]$.

Offensichtlich hat φ' einen Existenzquantor weniger als φ. Außerdem ist φ' keine Σ-Formel (denn sie verwendet $g \notin \mathrm{Fun}$), sondern Formel über einer erweiterten Signatur.

Lemma

Die Formeln φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei $\mathcal{A}'$ Struktur und ρ' Variableninterpretation mit $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$. Wir zeigen $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$. Hierzu seien $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}'}$ beliebig. Setze

$$\overline{\rho} = \rho'[x_1 \mapsto a_1][x_2 \mapsto a_2] \cdots [x_m \mapsto a_m]$$

und $b = g^{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_m)$.

Dann gilt
$\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \psi[y := g(x_1, \ldots, x_m)]$
$\Longrightarrow$ (Folie 8.10) $\mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}[y \mapsto b]} \psi$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \exists y\, \psi$
Da $a_1, \ldots, a_m$ beliebig sind, haben wir $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$ gezeigt.

„$\Rightarrow$" Sei nun $\mathcal{A}$ Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

Zunächst definieren wir eine Funktion $G \colon U_{\mathcal{A}}^m \to U_{\mathcal{A}}$: seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig
$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1] \cdots [x_m \mapsto a_m]} \exists y \, \psi$

$\Longrightarrow$ es gibt $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1] \cdots [x_m \mapsto a_m][y \mapsto b]} \psi$

Setze $G(a_1, \ldots, a_m) := b$, womit die Definition der Funktion G abgeschlossen ist.

Definiere eine neue Struktur $\mathcal{A}'$ über der Signatur $(\mathrm{Fun} \uplus \{g\}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ mit

- $U_{\mathcal{A}'} = U_{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{A}'} = f^{\mathcal{A}}$ für alle Funktionssymbole $f \in \mathrm{Fun}$,
- $R^{\mathcal{A}'} = R^{\mathcal{A}}$ für alle $R \in \mathrm{Rel}$ und
- $g^{\mathcal{A}'} = G$.

Seien nun $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig.
Dann gilt
$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$
$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \exists y\, \psi$
$\xrightarrow{\text{Definition von } G} \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m][y \mapsto G(a_1,\ldots,a_m)]} \psi$
$\Longrightarrow$ (Folie 8.10) $\mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \psi\big[y := g(x_1, \ldots, x_m)\big]$

Da das Tupel $a_1, \ldots, a_m$ beliebig war, haben wir $\mathcal{A}' \models_\rho \varphi'$ gezeigt, d.h. φ' ist erfüllbar. $\square$

Satz

Aus einer Formel φ kann man eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\overline{\varphi}$ in Skolemform berechnen.
Ist φ gleichungsfrei, so auch $\overline{\varphi}$.

Beweis: Nach Folie 12.6 kann zu φ äquivalente Formel

$$\varphi_0 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_\ell x_\ell \, \psi$$

in Pränexform berechnet werden (mit $n \leq \ell$ Existenzquantoren). Durch wiederholte Anwendung des vorherigen Lemmas erhält man Formeln φ_1, φ_2, $\dots \varphi_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- φ_i und φ_{i+1} sind erfüllbarkeitsäquivalent.
- φ_{i+1} enthält einen Existenzquantor weniger als φ_i.
- φ_{i+1} ist in Pränexform.
- Ist φ_i gleichungsfrei, so auch φ_{i+1}.

Dann ist $\overline{\varphi} = \varphi_n$ erfüllbarkeitsäquivalente (ggf. gleichungsfreie) Formel in Skolemform. □

Beispiel

1. Die Skolemform von

$$\varphi_0 \;=\; \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \Big(P(x, h(x_2, f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(x_4, x) \Big)$$

ergibt sich wie folgt:

$$\varphi_1 \;=\; \forall x_1 \forall x_3 \exists x_4 \Big(P(x, h(g_1(x_1), f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(x_4, x) \Big)$$

$$\varphi_2 \;=\; \forall x_1 \forall x_3 \Big(P(x, h(g_1(x_1), f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(g_2(x_1, x_3), x) \Big)$$

2. Die Skolemform von $\exists x\, P(x)$ ist $P(a)$ für eine neue Konstante a.
   Aber: $\big(\exists x\, P(x)\big) \not\equiv \big(P(a)\big)$.
   Das heißt, der Beweis liefert tatsächlich nur eine erfüllbarkeitsäquivalente, aber i.a. nicht äquivalente Formel (es existiert auch keine äquivalente Formel in Skolemform).

Übersicht

Ziel (Folie 11.5): Allgemeingültigkeitstest
Unerfüllbarkeitstest

erreicht: Wir brauchen einen Unerfüllbarkeitstest für gleichungsfreie Aussagen in Skolemform.

nächster Schritt: besonders „einfache“ Strukturen, die ausreichen, um Unerfüllbarkeit von gleichungsfreien Aussagen in Skolemform zu testen.

Herbrand-Strukturen und Herbrand-Modelle

Sei $\Sigma = (\mathrm{Fun}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ eine Signatur. Wir nehmen im folgenden an, daß Fun wenigstens ein Konstantensymbol enthält.

Das Herbrand-Universum $D(\Sigma)$ ist die Menge aller variablenfreien Σ-Terme.

Beispiel: $\mathrm{Fun} = \{b, f\}$ mit $\mathrm{ar}(b) = 0$ und $\mathrm{ar}(f) = 1$. Dann gilt $D(\Sigma) = \big\{b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), \dots\big\}$

Eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = \big(U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \mathrm{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \mathrm{Rel}}\big)$ ist eine Herbrand-Struktur, falls folgendes gilt:

1. $U_{\mathcal{A}} = D(\Sigma)$,
2. für alle $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und alle $t_1, t_2, \dots, t_k \in D(\Sigma)$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, t_2, \dots, t_k) = f(t_1, t_2, \dots, t_k)\,.$$

Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{A}$, alle Variableninterpretationen ρ und alle variablenfreien Terme t gilt dann $\rho(t) = t$.

Ein Herbrand-Modell von φ ist eine Herbrand-Struktur, die gleichzeitig ein Modell von φ ist.

Satz

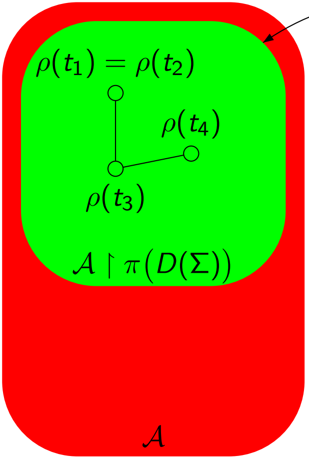
Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform.
φ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell besitzt.

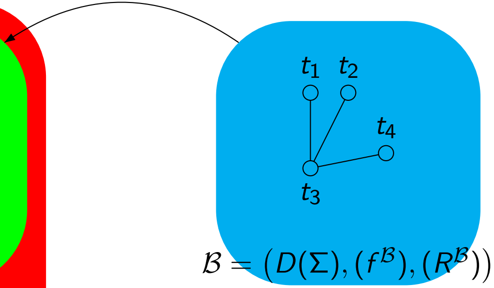
Beweis:

Falls φ ein Herbrand-Modell hat, ist φ natürlich erfüllbar.

Sei nun $\varphi = \forall y_1 \ldots \forall y_n \, \psi$ erfüllbar. Dann existieren eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = \big(U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \mathrm{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \mathrm{Rel}}\big)$ und eine Variableninterpretation ρ mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

$$\begin{array}{rcl} \pi : \quad D(\Sigma) & \to & U_{\mathcal{A}} \\ t & \mapsto & \rho(t) \end{array}$$





$$\mathcal{A} \models_{\rho} \underbrace{\forall y_1 \ldots \forall y_n \, \psi}_{=\varphi}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A} \restriction (\pi(D(\Sigma))) \models_{\rho} \forall y_1 \ldots \forall y_n \, \psi$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \forall y_1 \ldots \forall y_n \, \psi$$

Wir definieren nun eine Herbrand-Struktur
$\mathcal{B} = \big(D(\Sigma), (f^{\mathcal{B}})_{f \in \mathrm{Fun}}, (R^{\mathcal{B}})_{R \in \mathrm{Rel}}\big)$:

- Seien $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$. Um eine Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$ zu konstruieren setzen wir

$$f^{\mathcal{B}}(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k)$$

- Sei $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ und seien $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$. Dann setze

$$(t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{B}} :\iff \big(\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)\big) \in R^{\mathcal{A}}\,.$$

Sei $\rho_{\mathcal{B}} \colon \mathrm{Var} \to D(\Sigma)$ beliebige Variableninterpretation.

Behauptung 1: Ist ψ eine quantoren- und gleichungsfreie Aussage, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \psi \iff \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi \,.$$

Diese Behauptung wird induktiv über den Aufbau von ψ gezeigt.

I.A. ψ ist atomar, d.h. $\psi = R(t_1, \ldots, t_k)$ für ein $R \in \mathrm{Rel}$ und Terme $t_1, \ldots, t_k$: Da ψ Aussage ist, sind die Terme $t_1, \ldots, t_k$ variablenfrei, d.h. $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \psi \quad &\iff \quad \big(\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)\big) \in R^\mathcal{A} \quad &&\iff \quad (t_1, \ldots, t_k) \in R^\mathcal{B} \\ &\iff \quad \big(\rho_\mathcal{B}(t_1), \ldots, \rho_\mathcal{B}(t_k)\big) \in R^\mathcal{B} \quad &&\iff \quad \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi \end{aligned}$$

I.S.

- $\psi = \neg\alpha$:

$$\mathcal{A} \models_\rho \psi \iff \mathcal{A} \not\models_\rho \alpha \overset{\text{IV}}{\iff} \mathcal{B} \not\models_{\rho_\mathcal{B}} \alpha \iff \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi$$

- $\psi = \alpha \wedge \beta$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \psi &\iff \mathcal{A} \models_\rho \alpha \text{ und } \mathcal{A} \models_\rho \beta \\ &\overset{\text{IV}}{\iff} \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \beta \\ &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi \end{aligned}$$

- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog.
- $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$: analog.

Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Intermezzo: Beh. 1 gilt nur für quantorenfreie Aussagen

$\varphi = \forall x \left(\mathrm{gleich\_alt}(x, x) \wedge \mathrm{gleich\_alt}(a, a)\right)$ ist Formel in Skolemform.

$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ mit $U_\mathcal{A}$ = Menge aller Menschen und
$\mathrm{gleich\_alt}^\mathcal{A} = \big\{(m, n) \mid m, n \text{ haben gleichen Geburtstag}\big\}$.

konstruierte Herbrand-Struktur $\mathcal{B}$: $U_\mathcal{B} = D(\Sigma) = \{a\}$ und
$\mathrm{gleich\_alt}^\mathcal{B} = \big\{(a, a)\big\}$.

Betrachte nun die Formel $\psi = \forall x, y \, \mathrm{gleich\_alt}(x, y)$.

Dann gilt $\mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \psi$ und $\mathcal{A} \not\models_\rho \psi$.

Für allgemeine Formeln in Skolemform (also u.U. mit Quantoren) können wir also Behauptung 1 nicht zeigen, sondern höchstens die folgende Abschwächung.

Behauptung 2: Ist ψ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform, so gilt

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \psi \Longrightarrow \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \psi\,.$$

(hieraus folgt dann $\mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi$ wegen $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$)

Diese Behauptung wird induktiv über die Anzahl n der Quantoren in ψ bewiesen.

I.A.: $n = 0$:

Aus $\mathcal{A} \models_{\rho} \psi$ folgt $\mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \psi$ nach Behauptung 1.

I.S.: Sei $\psi = \forall x\, \psi'$.

Aus $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \psi'$ folgt

$$\text{für alle } d \in U_\mathcal{A} \text{ gilt } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto d]} \psi'\,.$$

Wegen $\rho(t) \in U_\mathcal{A}$ für alle $t \in D(\Sigma)$ folgt

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \psi'\,.$$

Nach Folie 8.10 ergibt sich

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{A} \models_\rho \psi'[x := t]\,.$$

Die Terme $t \in D(\Sigma)$ sind variablenfrei. Also ist $\psi'[x := t]$ eine Aussage. Sie ist wieder in Skolemform und hat nur $n - 1$ Quantoren. Nach der IV erhalten wir

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \psi'[x := t]$$

und damit nach Folie 8.10

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto \rho_{\mathcal{B}}(t)]} \psi' \,.$$

Da alle Terme $t \in D(\Sigma)$ variablenfrei sind, gilt $\rho_{\mathcal{B}}(t) = t$ und damit

$$\text{für alle } t \in D(\Sigma) \text{ gilt } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}[x \mapsto t]} \psi' \,.$$

Aus $U_{\mathcal{B}} = D(\Sigma)$ ergibt sich

$$\mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \forall x \, \psi' \,.$$

Damit ist Behauptung 2 und damit der Satz bewiesen. $\square$

Zwischenbilanz

Folie 11.5: Gesucht ist ein (2.) Semi-Entscheidungsverfahren für die Frage, ob eine geg. Σ-Formel ψ allgemeingültig ist (d.h. ob $\varphi = \neg\psi$ unerfüllbar ist).

Satz auf Folie 12.15: aus φ kann eine erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Σ'-Formel φ' in Skolemform berechnen werden

$\Longrightarrow$ gesucht ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für die Unerfüllbarkeit solcher Formeln

Satz auf Folie 12.19: eine solche Formel ist genau dann unerfüllbar, wenn sie *kein* Herbrand-Modell besitzt

$\Longrightarrow$ gesucht ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für die *Nicht*-Existenz eines Herbrand-Modells ...

... aber wir haben ja noch ein paar Vorlesungen.

Zusammenfassung 12. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- weitere Vereinfachung von Formeln: Pränexform und Skolemform
- Herbrand-Modelle reichen für Unerfüllbarkeit von Formeln in Skolemform

kommende Vorlesung

- endlich: 2. Semi-Entscheidungsverfahren
- Bestimmung von „Lösungen“