Die Herbrand-Expansion

verbleibende Frage: Wie erkennt man, ob eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform ein Herbrand-Modell hat?

Beispiel: Seien $\Sigma = \big(\{a, f\}, \{P, R\}, \mathrm{ar}\big)$ und

$$\varphi = \forall x \, \forall y \, \Big(P(a, x) \wedge \neg R\big(f(y)\big)\Big).$$

Jedes Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ von φ

- hat als Universum das Herbrand-Universum $D(\Sigma) = \big\{a, f(a), f^2(a), \dots\big\} = \big\{f^n(a) \mid n \geq 0\big\}$
- erfüllt $f^{\mathcal{A}}\big(f^n(a)\big) = f^{n+1}(a)$ für alle $n \geq 0$

Um ein Herbrand-Modell zu konstruieren, müssen (bzw. können) wir für alle Elemente $s, t, u \in D(\Sigma)$ unabhängig und beliebig wählen, ob $(s, t) \in P^{\mathcal{A}}$ und $u \in R^{\mathcal{A}}$ gilt.

Wir fassen dies als „aussagenlogische B-Belegung“ $\mathcal{B}$ der „aussagenlogischen atomaren Formeln“ $P(s, t)$ bzw. $R(u)$ auf.

Jede solche aussagenlogische B-Belegung $\mathcal{B}$ definiert dann eine Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$:

- $P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \left\{(s,t) \in D(\Sigma)^2 \;\middle|\; \mathcal{B}\big(P(s,t)\big) = 1\right\}$
- $R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \left\{u \in D(\Sigma) \;\middle|\; \mathcal{B}\big(R(u)\big) = 1\right\}$

Mit $\varphi = \forall x\, \forall y\, \Big(P(a,x) \wedge \neg R\big(f(y)\big)\Big)$ gilt dann

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \varphi & & \\
\iff & \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_{\rho[x \mapsto f^m(a)][y \mapsto f^n(a)]} P(a,x) \wedge \neg R\big(f(y)\big) & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & \big(a, f^m(a)\big) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \text{ und } f^{n+1}(a) \notin R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & \mathcal{B}\big(P(a,f^m(a))\big) = 1 \text{ und } \mathcal{B}\big(R(f^{n+1}(a))\big) = 0 & \text{f.a. } m,n \geq 0 \\
\iff & \mathcal{B}\Big(P\big(a,f^m(a)\big) \wedge \neg R\big(f^{n+1}(a)\big)\Big) = 1 & \text{f.a. } m,n \geq 0
\end{array}
$$

Also hat φ genau dann ein Herbrand-Modell, wenn Menge aussagenlogischer Formeln

$$E(\varphi) = \left\{P\big(a, f^m(a)\big) \wedge \neg R\big(f^{n+1}(a)\big) \;\middle|\; m,n \geq 0\right\}$$

erfüllbar ist.

Beispiellösung: Setzt $\mathcal{B}\big(P(s,t)\big) = 1$ und $\mathcal{B}\big(R(s)\big) = 0$ für alle $s, t \in D(\Sigma)$.

Diese B-Belegung erfüllt $E(\varphi)$ und „erzeugt" die Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ mit $P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = D(\Sigma)^2$ und $R^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \emptyset$.

Nach obiger Überlegung gilt $\mathcal{A}_\mathcal{B} \models \varphi$, wir haben also ein Herbrand-Modell von φ gefunden.

Auf den folgenden Folien wird dieses Verfahren allgemein formuliert und seine Korrektheit bewiesen.

Sei $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \, \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform.

Ziel: Konstruktion einer Menge aussagenlogischer Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn φ ein Herbrand-Modell hat.

Die Herbrand-Expansion von φ ist die Menge der Aussagen

$$E(\varphi) = \left\{ \psi[y_1 := t_1][y_2 := t_2] \dots [y_n := t_n] \;\middle|\; t_1, t_2, \dots, t_n \in D(\Sigma) \right\}$$

Die Formeln von $E(\varphi)$ entstehen also aus ψ, indem die (variablenfreien) Terme aus $D(\Sigma)$ in jeder möglichen Weise in ψ substituiert werden.

Wir betrachten die Herbrand-Expansion von φ im folgenden als eine Menge von aussagenlogischen Formeln.

Die atomaren Formeln sind hierbei von der Gestalt $P(t_1, \dots, t_k)$ für $P \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(P) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$.

Konstruktion

Sei $\mathcal{B}\colon \{P(t_1,\ldots,t_k) \mid P \in \mathrm{Rel}, k = \mathrm{ar}(P), t_1,\ldots,t_k \in D(\Sigma)\} \to B$ eine B-Belegung.

Die hiervon induzierte Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ ist gegeben durch

$$P^{\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} = \{(t_1,\ldots,t_k) \mid t_1,\ldots,t_k \in D(\Sigma), \mathcal{B}(P(t_1,\ldots,t_k)) = 1\}$$

für alle $P \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(P) = k$.

Lemma

Für jede quantoren- und gleichungsfreie Aussage α und jede Variableninterpretation ρ in $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ gilt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \models_\rho \alpha \iff \mathcal{B}(\alpha) = 1\,.$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau von α:

I.A. α ist atomar, d.h. $\alpha = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit $t_1, \ldots, t_k$ variablenlos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \alpha \quad &\iff \quad \big(\rho(t_1), \rho(t_2), \ldots, \rho(t_k)\big) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \\
&\overset{\rho(t_i)=t_i}{\iff} \quad (t_1, \ldots, t_k) \in P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} \\
&\iff \quad \mathcal{B}\big(P(t_1, \ldots, t_k)\big) = 1 \\
&\iff \quad \mathcal{B}(\alpha) = 1
\end{aligned}$$

I.S.

- $\alpha = \beta \wedge \gamma$:
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \alpha \quad &\iff \quad \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \beta \text{ und } \mathcal{A}_\mathcal{B} \models_\rho \gamma \\
&\overset{\text{I.V.}}{\iff} \quad \mathcal{B}(\beta) = \mathcal{B}(\gamma) = 1 \\
&\iff \quad \mathcal{B}(\alpha) = 1
\end{aligned}$$

- $\alpha = \beta \vee \gamma$: analog
- $\alpha = \beta \to \gamma$: analog
- $\alpha = \neg\beta$: analog

$\square$

Lemma

Sei $\varphi = \forall y_1 \, \forall y_2 \, \ldots \forall y_n \, \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie hat genau dann ein Herbrand-Modell, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Beweis: Seien $\mathcal{A}$ Herbrand-Struktur und ρ Variableninterpretation. Sei $\mathcal{B}$ die B-Belegung mit $\mathcal{B}\big(P(t_1, \ldots, t_k)\big) = 1 \iff (t_1, \ldots, t_k) \in P^{\mathcal{A}}$ für alle $P \in \mathrm{Rel}$ mit $k = \mathrm{ar}(P)$ und $t_1, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$. Dann gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$

$\iff$ für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(\Sigma)$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[y_1 \mapsto t_1][y_2 \mapsto t_2] \ldots [y_n \mapsto t_n]} \psi$

$\iff$ (Folie 8.10) für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(\Sigma)$ gilt
$$\mathcal{A} \models_\rho \psi[y_n := t_n] \ldots [y_2 := t_2][y_1 := t_1]$$

$\iff$ für alle $\alpha \in E(\varphi)$ gilt $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$

$\iff$ $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in E(\varphi)$ $\square$

Satz von Gödel-Herbrand-Skolem

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie ist genau dann erfüllbar, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Beweis:

φ erfüllbar

$\iff$ (Folie 12.19) φ hat ein Herbrand-Modell

$\xLeftrightarrow{\text{Lemma oben}}$ $E(\varphi)$ ist im aussagenlogischen Sinne erfüllbar. $\square$

Satz von Herbrand

Eine gleichungsfreie Aussage φ in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ gibt, die (im aussagenlogischen Sinn) unerfüllbar ist.

Beweis: φ unerfüllbar
$\iff$ (Folie 13.8) $E(\varphi)$ unerfüllbar
$\iff$ (Folie 5.21) es gibt $M \subseteq E(\varphi)$ endlich und unerfüllbar $\square$

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform und sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine Aufzählung von $E(\varphi)$.

Algorithmus von Gilmore

Eingabe: φ
$n := 0$;
repeat $n := n + 1$;
until $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar;
(dies kann mit Mitteln der Aussagenlogik, z.B. Wahrheitswertetabelle, getestet werden)
Gib „unerfüllbar“ aus und stoppe.

Folgerung

Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Dann gilt:

- Wenn die Eingabeformel φ unerfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus von Gilmore und gibt „unerfüllbar“ aus.
- Wenn die Eingabeformel φ erfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus von Gilmore *nicht*, d.h. er läuft unendlich lange.

Beweis: unmittelbar mit Satz von Herbrand (Folie 13.9) $\square$

Zusammenfassung

Auf Folie 11.5 fragten wir nach einem alternativen Semi-Entscheidungsverfahren für die Menge der allgemeingültigen Formeln. Dieses haben wir jetzt:

- Berechne aus ψ eine zu $\neg\psi$ erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Aussage φ in Skolemform.
- Suche mit dem Algorithmus von Gilmore nach einer endlichen Teilmenge E' von $E(\varphi)$, die unerfüllbar ist.

Beispiel

$$\begin{aligned} \gamma &= \forall x, y \left(R(x, f(y)) \wedge R(g(x), y)\right) \\ \varphi &= \forall x, y\, R(x, y) \end{aligned}$$

Gilt $\{\gamma\} \models \varphi$? nein, denn $\mathcal{A} \models \gamma \wedge \neg\varphi$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R) \\ f^{\mathcal{A}}(n) = g^{\mathcal{A}}(n) &= n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ R^{\mathcal{A}} &= \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

Gibt es variablenfreie Terme s und t mit $\{\gamma\} \models R(s, t)$?

ja: z.B. $(s, t) = \left(g(f(a)), g(a)\right)$ oder $(s, t) = (g(a), g(a))$ oder
$(s, t) = (a, f(b))$

Kann die Menge aller Termpaare (s,t) (d.h. aller „Lösungen“) mit $\{\gamma\} \models R(s,t)$ effektiv und übersichtlich angegeben werden?

Wegen

$$\{\gamma\} \models R(s,t) \iff \gamma \wedge \neg R(s,t) \text{ unerfüllbar}$$

ist die gesuchte Menge der variablenfreien Terme (s,t) semi-entscheidbar, d.h. durch eine Turing-Maschine beschrieben.

Im Rest des Logikteils der Vorlesung „Logik und Logikprogrammierung“ wollen wir diese Menge von Termpaaren „besser“ beschreiben (zumindest in einem Spezialfall, der die Grundlage der logischen Programmierung bildet).

Erinnerung

Eine Horn-Klausel der Prädikatenlogik ist eine Aussage der Form

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \left((\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta \right),$$

mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und β atomare Formel oder $\bot$.

Aufgabe

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gleichungsfreie Horn-Klauseln, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)$ atomare Formel, keine Gleichung. Bestimme die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ von variablenfreien Termen mit

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)[x_1 := s_1] \cdots [x_\ell := s_\ell],$$

d.h., für die die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge \neg\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \equiv \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge \left(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \rightarrow \bot \right)$$

Erinnerung

- Eine Horn-Formel der Prädikatenlogik ist eine Konjunktion von Horn-Klauseln der Prädikatenlogik.
- Eine Horn-Klausel der Aussagenlogik ist eine Formel der Form

$$(\neg\bot \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_m) \to r$$

mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, r atomare Formel od. $\bot$.

Beobachtung

- Wir müssen die Unerfüllbarkeit einer gleichungsfreien Horn-Formel der Prädikatenlogik testen.
- Ist φ gleichungsfreie Horn-Klausel der Prädikatenlogik, so ist $E(\varphi)$ eine Menge von Horn-Klauseln der Aussagenlogik.

Schreib- und Sprechweise

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \to \beta$ für Horn-Klausel der Prädikatenlogik
  $(\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \beta$
  insbes. $\emptyset \to \beta$ für $\neg\bot \to \beta$
- $\{(N_i \to \beta_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ für Horn-Formel $\bigwedge_{1\leq i\leq m} (N_i \to \beta_i)$

Folgerung

Sei $\varphi = \bigwedge_{1\leq i\leq n} \varphi_i$ gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik. Dann ist φ genau dann unerfüllbar, wenn $\bigcup_{1\leq i\leq n} E(\varphi_i)$ im aussagenlogischen Sinne unerfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen: φ erfüllbar $\iff \bigcup_{1\leq i\leq n} E(\varphi_i)$ erfüllbar (*)

Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$\varphi_i = \forall x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{m_i}^i \, \psi_i \, .$$

Zur Vereinfachung nehme wir an, daß die Variablen x_j^i für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m_i$ paarweise verschieden sind.
Dann gilt

$$\varphi \equiv \varphi' := \forall (x_j^i)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m_i}} \bigwedge_{1\leq i\leq n} \psi_i \, .$$

Wir erhalten

$$E(\varphi') = \{ \bigwedge_{1 \le i \le n} \alpha_i \mid \alpha_i \in E(\varphi_i) \text{ für alle } 1 \le i \le n \}$$

Jetzt zeigen wir die beiden Implikationen von (*):

„$\Rightarrow$“ φ erfüllbar

$\Longrightarrow$ φ' erfüllbar

$\Longrightarrow$ (Folie 13.8) $E(\varphi')$ erfüllbar,

d.h. es gibt B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in E(\varphi')$.

Sei $1 \le k \le n$ und $\alpha_k \in E(\varphi_k)$. Für $i \neq k$ wähle $\alpha_i \in E(\varphi_i)$.

$\Longrightarrow$ $\bigwedge_{1 \le i \le n} \alpha_i \in E(\varphi')$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(\bigwedge_{1 \le i \le n} \alpha_i) = 1$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(\alpha_k) = 1$.

Mit anderen Worten: $\mathcal{B}$ ist erfüllende Belegung für $\bigcup_{1 \le i \le n} E(\varphi_i)$.

„$\Leftarrow$" $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ erfüllbar,
d.h. es gibt B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ f.a. $1 \leq i \leq n$ und $\alpha_i \in E(\varphi_i)$.

Sei $\alpha \in E(\varphi')$. Dann existieren $\alpha_i \in E(\varphi_i)$ f.a. $1 \leq i \leq n$ mit $\alpha = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$. Wegen $\mathcal{B}(\alpha_i) = 1$ f.a. $1 \leq i \leq n$ folgt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$.
Also ist $E(\varphi')$ erfüllbar.
$\Longrightarrow$ (Folie 13.8) φ' erfüllbar
$\Longrightarrow$ φ erfüllbar. $\square$

Folgerung

Eine gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Beweis: φ unerfüllbar

$\Leftrightarrow$ (Folie 13.18) $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ unerfüllbar

$\Leftrightarrow$ (Folie 6.18) es gibt SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ $\square$

Wir wollen die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ variablenfreier Terme bestimmen, für die

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i \wedge \big(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big)$$

unerfüllbar ist (vgl. Folie 13.15).

Wegen $E\big(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big) = \big\{\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big\}$ suchen wir also die Menge aller Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$, so daß es SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i) \cup \big\{\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big\}$$

mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Wir versuchen, diejenige Tupel, für die diese SLD-Resolutionen „sehr ähnlich“ sind, zusammenzufassen, und zwar in einer „prädikatenlogischen SLD-Resolution“ (übernächste und damit letzte Vorlesung).

Zusammenfassung 13. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- endlich: 2. Semi-Entscheidungsverfahren (Satz von Herbrand, Algorithmus von Gilmore)
- Bestimmung von „Lösungen“

kommende Vorlesung

- Die Menge aller Lösungen von $\emptyset \models s = t$ für Terme s und t (Unifikation).