Erinnerung

- Eine Horn-Klausel der Prädikatenlogik ist eine Aussage der Form

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \left((\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta \right),$$

  mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und β atomare Formel oder $\bot$. Sie ist definit, wenn $\beta \neq \bot$.
- Eine Horn-Formel der Prädikatenlogik ist eine Konjunktion von Horn-Klauseln der Prädikatenlogik.
- Eine Horn-Klausel der Aussagenlogik ist eine Formel der Form

$$(\neg\bot \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_m) \rightarrow r$$

  mit $m \geq 0$, atomaren Formeln $q_1, q_2, \ldots, q_m$, r atomare Formel od. $\bot$.

Schreib- und Sprechweise

- $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \to \beta$ für Horn-Klausel der Prädikatenlogik
  $(\neg\bot \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \to \beta$
  insbes. $\emptyset \to \beta$ für $\neg\bot \to \beta$
- $\{(N_i \to \beta_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ für Horn-Formel $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (N_i \to \beta_i)$

Aufgabe (vgl. Folie 13.15)

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gleichungsfreie Horn-Klauseln, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)$ atomare Formel, keine Gleichung. Bestimme die Menge der Tupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ von variablenlosen Termen mit

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell) = R(t_1, \ldots, t_k)[x_1 := s_1] \cdots [x_\ell := s_\ell]\,,$$

d.h., für die die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\bigwedge_{1 \le i \le n} \varphi_i \wedge \neg\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \equiv \bigwedge_{1 \le i \le n} \varphi_i \wedge \big(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big)$$

Auf Folie 13.22 haben wir gesehen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn es eine SLD-Resolution $(M_0 \to \bot, M_1 \to \bot, \ldots, M_m \to \bot)$ aus

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i) \cup E\big(\psi(s_1, \ldots, s_\ell) \to \bot\big)$$

mit $M_m = \emptyset$ gibt.

Ziel

Zusammenfassung von möglichst vielen solchen SLD-Resolutionen für verschiedene Termtupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ in einer prädikatenlogischen SLD-Resolution.

Prädikatenlogische SLD-Resolution

Definition

Sei Γ eine Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge

$$((M_0 \to \bot, \sigma_0), (M_1 \to \bot, \sigma_1), \ldots, (M_m \to \bot, \sigma_m))$$

von Horn-Klauseln und Substitutionen mit

- $(M_0 \to \bot) \in \Gamma$ und $\mathrm{Def}(\sigma_0) = \emptyset$
- für alle $0 \leq n < m$ existieren $\beta \in M_n$, $(N \to \alpha) \in \Gamma$ und Variablenumbenennung ρ, so daß
  - $(N \cup \{\alpha\})\rho$ und M_n variablendisjunkt sind,
  - σ_{n+1} ein allgemeinster Unifikator von $\alpha\,\rho$ und β ist und
  - $M_{n+1} = M_n\,\sigma_{n+1} \setminus \{\,\underbrace{\beta\,\sigma_{n+1}}_{=\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}}\,\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}$.

Lemma

Sei Γ Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik und $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ eine SLD-Resolution aus $\Gamma \cup (M_0 \to \bot)$ mit $M_m = \emptyset$. Sei weiter τ_0 Substitution, so daß $M_0' = M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\sigma_2 \cdots \sigma_m\,\tau_0$ variablenlos ist.
Dann gilt $\Gamma \models M_0'$.

Beispiel

$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $M_0 = \big\{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\big\} = \big\{R(t_1, t_2, \ldots, t_k)\big\}$,
$s_i = x_i\,\sigma_0\,\sigma_1\,\sigma_2 \cdots \sigma_m\,\tau_0$ für $1 \leq i \leq \ell$. Dann gilt also

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)\,. \qquad (*)$$

Aus einer SLD-Resolution können, mittels Wahl von τ_0, viele Termtupel $(s_1, \ldots, s_\ell)$ gewonnen werden, die (*) erfüllen.

Beweis: Seien $\Gamma^+ = \Gamma \cup \{M_0' \to \bot\}$ und $E(\Gamma^+) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma^+} E(\varphi)$.

Behauptung: es gibt Substitutionen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$, so daß

$$(M_0' \to \bot, M_1' \to \bot, \ldots, M_m' \to \bot)$$

mit

$$M_n' = M_n \, \sigma_{n+1} \, \sigma_{n+2} \, \ldots \, \sigma_m \, \tau_0 \, \tau_1 \, \ldots \, \tau_n$$

eine aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma^+)$ ist.

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt induktiv über n.

I.A. $n = 0$:
$(M_0' \to \bot) \in \Gamma^+$ und M_0' variablenlos
$\Longrightarrow M_0' \to \bot \in E(\Gamma^+)$
$\Longrightarrow (M_0' \to \bot)$ ist SLD-Resolution aus $E(\Gamma^+)$

I.V. Sei $0 \leq n < m$, seien $\tau_0, \ldots, \tau_n$ Substitutionen, so daß $(M'_i \to \bot)_{0 \leq i \leq n}$ SLD-Resolution aus $E(\Gamma^+)$ ist.

I.S. Insbes. ist $(M'_n \to \bot)$ variablenlos

Da $\big((M_n \to \bot, \sigma_i)\big)_{0 \leq n \leq m}$ prädikatenlogische SLD-Resolution aus Γ ist, existieren $(N \to \alpha) \in \Gamma$ und Variablenumbenennung ρ, so daß

- $\big(N \cup \{\alpha\}\big)\,\rho$ und M_n variablendisjunkt sind,
- σ_{n+1} allgemeinster Unifikator von $\alpha\rho$ und β ist und
- $M_{n+1} = M_n\,\sigma_{n+1} \setminus \{\beta\,\sigma_{n+1}\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}$.

Wähle Substitution τ_{n+1} so, daß $\big(N\,\rho \cup \{\alpha\}\big)\,\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,\sigma_m\,\tau_0\,\tau_1\,\ldots\,\tau_{n+1}$ variablenlos ist und setze $\theta = \sigma_{n+2}\,\ldots\,\sigma_m\,\tau_1\,\ldots\,\tau_{n+1}$.

Wegen $(N \to \alpha) \in \Gamma$ gilt dann

$$(N\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta \to \alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta) \in E(\Gamma^+)\,.$$

Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned} M_n\,\sigma_{n+1}\,\theta &= M_n\,\sigma_{n+1}\,\ldots\,\sigma_m\,\tau_1\,\ldots\,\tau_n\,\tau_{n+1} \\ &= M'_n\,\tau_{n+1} \\ &= M'_n \end{aligned}$$

da M'_n variablenlos ist.

$$
\begin{aligned}
M'_{n+1} &= M_{n+1}\,\theta \\
&= \big(M_n\,\sigma_{n+1} \setminus \{\beta\,\sigma_{n+1}\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}\big)\,\theta \\
&= \big(M_n\,\sigma_{n+1}\,\theta \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta\}\big) \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta \\
&= \big(M'_n \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta\}\big) \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\theta
\end{aligned}
$$

Damit ist also $(M'_0 \to \perp, M'_1 \to \perp, \ldots, M'_{n+1} \to \perp)$ eine aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma^+)$, d.h. die induktive Konstruktion der Substitutionen τ_n ist abgeschlossen.

Die Behauptung ist also bewiesen.

Aus der Behauptung erhalten wir insbesondere eine aussagenlog. SLD-Resolution $\big((M'_n \to \bot)\big)_{0 \leq n \leq m}$ aus $E(\Gamma^+)$ und Substitutionen τ_i mit $M'_m = M_m\, \tau_0\, \tau_1\, \ldots\, \tau_m$.

$\overset{M_m=\emptyset}{\Longrightarrow} M'_m = \emptyset$

$\Longrightarrow$ (Folie 6.18) $E(\Gamma^+)$ unerfüllbar im aussagenlogischen Sinne

$\Longrightarrow$ (Folie 13.18) Γ^+ unerfüllbar im prädikatenlogischen Sinne

$\Longrightarrow \Gamma \models M'_0$ $\square$

Lemma

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to \bot$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei ν Substitution, so daß $M\,\nu$ variablenlos ist und $\Gamma \models M\,\nu$ gilt.
Dann existieren eine prädikatenlogische SLD-Resolution $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M$, $M_m = \emptyset$ und $M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_m\,\tau = M\,\nu$.

Konsequenz

$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $M_0 = \big\{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\big\} = \big\{R(t_1, t_2, \ldots, t_k)\big\}$.

Alle Tupel variablenloser Terme mit

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)$$

können durch eine SLD-Resolution gewonnen werden (setze $\tau(x_i) = s_\ell$).

Beweis:
$\Gamma' = \Gamma \cup \{M\,\nu \to \bot\}$, $E(\Gamma') = \bigcup_{\varphi\in\Gamma'} E(\varphi) = \bigcup_{\varphi\in\Gamma} E(\varphi) \cup \{M\nu \to \bot\}$.

$\Gamma \models M\,\nu$

$\Longrightarrow$ Γ' unerfüllbar im prädikatenlogischen Sinne

$\Longrightarrow$ (Folie 13.18) $E(\Gamma')$ unerfüllbar im aussagenlogischen Sinne

$\Longrightarrow$ (Folie 6.18) es gibt aussagenlogische SLD-Resolution
$\big((M'_n \to \bot)\big)_{0\le n\le m}$ aus $E(\Gamma')$ mit $M'_m = \emptyset$.

Behauptung: Für alle $0 \le n \le m$ existieren eine prädikatenlogische SLD-Resolution $\big((M_i \to \bot, \sigma_i)\big)_{0\le i\le n}$ und Substitutionen ν_i mit $M_0 = M$, $M'_i = M_i\,\nu_i$ und $M\,\nu = M_0\,\sigma_0\,\sigma_1 \ldots \sigma_i\,\nu_i$ für alle $0 \le i \le n$.

Dann folgt die Behauptung des Lemmas aus dem Fall $m = n$ wegen $M'_m = M_m\,\nu_m = \emptyset\,\nu_m = \emptyset$.

I.A. $n = 0$:
$\big((M'_n \to \bot)\big)_{0 \le i \le n}$ aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma')$

$\Longrightarrow M'_0 \to \bot \in E(\Gamma')$

$\Longrightarrow M'_0 = M\,\nu$, da $M\,\nu \to \bot$ einzige nicht-definite Horn-Klausel in $E(\Gamma')$ ist.

Setze $M_0 := M$, $\sigma_0 := \emptyset$ und $\nu_0 := \nu$

Dann gilt die Behautung für $n = 0$.

I.V. Sei $0 \le n < m$ und gelte die Behauptung für dieses n.

I.S.

$\big((M'_n \to \bot)\big)_{0 \le n \le m}$ aussagenlogische SLD-Resolution aus $E(\Gamma')$

$\Longrightarrow$ es gibt $b \in M'_n$ und $(N' \to b) \in E(\Gamma')$ mit $M'_{n+1} = M'_n \setminus \{b\} \cup N'$

$(N' \to b) \in E(\Gamma')$

$\Longrightarrow$ es gibt $(N \to \alpha) \in \Gamma$, Variablenumbenennung ρ und Substitution σ mit

- $N' = N\,\rho\,\sigma$
- $b = \alpha\,\rho\,\sigma$ und
- $\big(N \cup \{\alpha\}\big)\,\rho$ und $M_n \cup M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_n$ sind variablendisjunkt

Definiere Substitution ν_n^+ durch

$$\nu_n^+(x) = \begin{cases} \nu_n(x) & \text{falls } x \text{ Variable in } M_n \\ \sigma(x) & \text{falls } x \text{ Variable in } \big(N \cup \{\alpha\}\big)\,\rho \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$\alpha\,\rho\,\sigma = b \in M'_n = M_n\,\nu_n = M_n\,\nu_n^+$

$\Longrightarrow$ es gibt $\beta \in M_n$ mit $\alpha\,\rho\,\sigma = \beta\,\nu_n^+$

Sei σ_{n+1} ein allgemeinster Unifikator von $\alpha\,\rho$ und β. Dann existieren Substitutionen σ' und ν_{n+1} mit $\sigma = \sigma_{n+1}\,\sigma'$ und $\nu_n^+ = \sigma_{n+1}\,\nu_{n+1}$.

Setze $M_{n+1} = M_n\,\sigma_{n+1} \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}$. Nach I.V. ist dann $\big((M_i \to \bot, \sigma_i)\big)_{0 \le i \le n+1}$ eine prädikatenlogische SLD-Resolution.

Es bleiben $M_{n+1}\,\nu_{n+1} = M'_{n+1}$ und $M\,\nu = M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_{n+1}\nu_{n+1}$ zu zeigen.

$$
\begin{aligned}
M_{n+1}\,\nu_{n+1} &= \left(M_n\,\sigma_{n+1} \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}\right)\nu_{n+1} \\
&= M_n\,\sigma_{n+1}\,\nu_{n+1} \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\nu_{n+1}\} \cup N\,\rho\,\sigma_{n+1}\,\nu_{n+1} \\
&= M_n\,\nu_n^+ \setminus \{\alpha\,\rho\,\nu_n^+\} \cup N\,\rho\,\nu_n^+ \\
&= M_n\,\nu_n \setminus \{\alpha\,\rho\,\sigma\} \cup N\,\rho\,\sigma \\
&= M_n' \setminus \{b\} \cup N' \\
&= M_{n+1}' \\
\text{und} & \\
M\,\nu &= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\nu_n \\
&= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\nu_n^+ \\
&= M_0\,\sigma_0\,\ldots\,\sigma_n\,\sigma_{n+1}\,\nu_{n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to \bot$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei ν Substitution, so daß $M' = M\,\nu$ variablenlos ist. Dann sind äquivalent:

- $\Gamma \models M'$
- Es existieren eine SLD-Resolution $\big((M_n \to \bot, \sigma_n)\big)_{0 \leq n \leq m}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M$, $M_m = \emptyset$ und $M_0\,\sigma_0\,\sigma_1\,\ldots\,\sigma_m\,\tau = M'$.

Konsequenz

$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $M_0 = \big\{\psi(x_1, \ldots, x_\ell)\big\} = \big\{R(t_1, t_2, \ldots, t_k)\big\}$.

Durch SLD-Resolutionen können genau die Tupel variablenloser Terme gewonnen werden, für die gilt:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)$$

Zusammenfassung Prädikatenlogik

- Das natürliche Schließen formalisiert die „üblichen“ Argumente in mathematischen Beweisen.
- Das natürliche Schließen ist vollständig und korrekt.
- Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- Die Menge der Aussagen, die in $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ gelten, ist nicht semi-entscheidbar.
- Die SLD-Resolution ist ein praktikables Verfahren, um die Menge der „Lösungen“ $(s_1, \ldots, s_\ell)$ von $\Gamma \models \psi(s_1, \ldots, s_\ell)$ zu bestimmen (wobei Γ Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln und ψ Konjunktion von gleichungsfreien Atomformeln sind).