TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 2

Abgabe bis zum 20. Oktober um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1

Auf einer wissenschaftlichen Konferenz entbrennt eine Diskussion zwischen den Teilnehmern A,B,C,D und E. Jeder der fünf Wissenschaftler hat eine Behauptung formuliert und diese soeben den anderen vorgestellt. Die folgenden Kommentare wurden geäußert und von allen Teilnehmern als richtig anerkannt:

(a) E: "Wenn C recht hat, dann stimme ich B zu, unabhängig davon, was D sagt."
(b) B: "E verwendet in seiner Argumentation Ergebnisse sowohl von A, als auch von C. Ich kann der Aussage von E also nur vertrauen, wenn keiner der beiden einen Fehler gemacht hat."
(c) A: "Meine Ergebnisse widerlegen D's Vermutung."
(d) C: "Wenn es stimmt, was A sagt, dann können B und D nicht beide falsch liegen."
(e) A: "Das Ergebnis von B ist allgemeiner als das von D."
(f) E: "C und D widersprechen sich gegenseitig."
(g) B: "C's Behauptung macht nur Sinn, wenn wir annehmen, dass E falsch liegt."
(h) D: "A und B haben nicht beide Unrecht."

Formalisieren Sie die gegebenen Aussagen durch eine Menge aussagenlogischer Formeln Γ. Verwenden Sie atomare Formeln $X \in \{A, B, C, D, E\}$ mit der Bedeutung: "Die Behauptung von Wissenschaftler X ist korrekt".
Zeigen Sie, dass unter den obigen Annahmen der Wissenschaftler A einen Fehler gemacht haben muss, indem Sie eine Deduktion für $\Gamma \vdash \neg A$ angeben.

Zusatz: Prüfen Sie, welche der Wissenschaftler B, C, D und E recht haben, und welche nicht (je durch Angabe einer geeigneten Deduktion).

Aufgabe 2* — 2 Punkte

Wir möchten in dieser Aufgabe die Aussagenlogik um den zweistelligen Operator $\otimes$ (XOR, "entweder ... oder ... (aber nicht beides)") erweitern.
Überlegen Sie sich dazu, wie Sie eine Aussage *"entweder φ oder ψ"* beweisen bzw. in einem Beweis verwenden würden und geben Sie entsprechende Regeln ($\otimes$I) und ($\otimes$E) an (ggf. mit verschiedenen Fällen, ähnlich wie etwa bei der Konjunktionselimination).

Zusatz: Zeigen Sie $\{ \varphi \vee \psi, \varphi \longrightarrow \neg \psi, \psi \longrightarrow \neg \varphi \} \vdash \varphi \otimes \psi$.

Aufgabe 3* — 2+3+4+1 Punkte

Wir möchten in dieser Aufgabe das Distributivgesetz "$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) = \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$" zeigen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie $\{ \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \} \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ indem Sie die folgende Deduktion vervollständigen:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}{\qquad}\,(\wedge E_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\qquad}{\varphi}\,(\wedge E_1) \qquad \psi}{\qquad}}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\qquad}{\varphi}\,(\wedge E_1) \qquad \chi}{\qquad}}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)}}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)}\,(\vee E)$$

(b) Geben Sie eine Deduktion D_1 für $\{ (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \} \vdash \varphi$ an.

(c) Geben Sie eine Deduktion D_2 für $\{ (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \} \vdash \psi \vee \chi$ an.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass $\{ (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \} \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen D_1 und D_2 in Aufgabe (d) verwenden, ohne (b) oder (c) bearbeitet zu haben.

Aufgabe 4* 3 Punkte

In Aufgabe 1 des ersten Übungsblattes haben wir Aussagen der natürlichen Sprache durch folgende Formeln formalisiert:

$$G \longrightarrow F \qquad (R \vee O) \wedge \neg(R \wedge O) \qquad \neg R \vee \neg S \qquad O \longrightarrow G$$

Geben Sie eine formale Deduktion mit Konklusion $\neg R \longrightarrow G$ an, welche ausschließlich diese Formeln als Hypothesen nutzt (alle anderen Hypothesen sind gestrichen).