TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

Logik und Logikprogrammierung – Übung 3

Abgabe bis zum 27. Oktober um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1*

1+1+2+2 Punkte

Seien p, q und r paarweise verschiedene atomare Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\{\, p \longrightarrow p \,\} \models p$
(b) $\{\, p \longrightarrow q, \neg q \,\} \models \neg p$
(c) $\{\, p \vee q, q \vee r \,\} \models p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$
(d) $\{\, \neg p \vee q, \neg q, p \,\} \models r$

Aufgabe 2*

1+1+2+2 Punkte

Seien p, q und r paarweise verschiedene atomare Formeln. Entscheiden Sie, welche der folgenden Formeln Tautologien sind (beweisen Sie Ihre Behauptung):

(a) $\neg(p \wedge \neg p)$
(b) $\neg(p \longrightarrow \bot) \vee \neg p$
(c) $(p \longrightarrow q) \vee (q \longrightarrow p)$
(d) $p \longrightarrow \big(q \longrightarrow (r \longrightarrow p)\big)$

Aufgabe 3*

3 Punkte

Geben Sie für das Korrektheitslemma (Folien 3.13ff) den Induktionsschritt für den Fall $(\neg\mathrm{I})$ an.

Aufgabe 4

In Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes haben wir den Operator $\varphi \mathbin{?} \psi \ : \ \chi$ (falls φ dann ψ, sonst χ) eingeführt und das natürliche Schließen um die folgenden Ableitungsregeln erweitert:

$$\frac{\begin{array}{cc}[\varphi] & [\neg\varphi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \chi\end{array}}{\varphi \mathbin{?} \psi \ : \ \chi}\ (\texttt{if}\text{-I}) \qquad \frac{\varphi \mathbin{?} \psi \ : \ \chi \qquad \varphi}{\psi}\ (\texttt{if}\text{-E}_1) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi \mathbin{?} \psi \ : \ \chi \qquad \neg\varphi}{\chi}\ (\texttt{if}\text{-E}_2).$$

Geben Sie analog zu Folie 3.3 die Semantik des Operators an und erweitern Sie den Induktionsschritt des Korrektheitslemmas um den Fall ($\texttt{if}$-I).

Zusatz. Betrachten Sie auch die Fälle ($\texttt{if}$-E$_1$) und ($\texttt{if}$-E$_2$).

Aufgabe 5

Zeigen Sie das Distributivgesetz "$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) = \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$", d.h. geben Sie je eine Deduktion für

$$\{\, (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \,\} \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \qquad \text{und} \qquad \{\, \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \,\} \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

an.