TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 4

Abgabe bis zum 03. November um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1*

2+2 Punkte

Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine Formel φ' gibt, welche ausschließlich den Operator $\longrightarrow$ verwendet und für welche $\mathcal{B}(\varphi') = \mathcal{B}(\varphi)$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Gibt es eine Formel, welche ausschließlich atomare Formeln und $\longrightarrow$ verwendet (isb. also nicht $\bot$) und unter jeder passenden Belegung zu 0 ausgewertet wird? (Beweisen Sie Ihre Behauptung)

Aufgabe 2*

3+1 Punkte

Sei $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln derart, dass sowohl $\Gamma \cup \{\varphi\}$, als auch $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ konsistent sind. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \text{gdw.} \quad \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi.$$

Gilt die Behauptung auch, falls auf die Forderung der Konsistenz verzichtet wird?

Aufgabe 3*

2 Punkte

Seien Δ und Δ' zwei maximal konsistente Mengen mit $p \in \Delta$ gdw. $p \in \Delta'$ für alle atomaren Formeln p. Zeigen Sie, dass die beiden Mengen dann gleich sind.

Hinweis. Verwenden Sie die erfüllenden Belegungen für Δ bzw. Δ' aus der Vorlesung (Folien 4.2ff).

Aufgabe 4*

2 Punkte

Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller atomaren Formeln und $Q \subseteq P$ beliebig. Zeigen Sie, dass es eine maximal konsistente Menge Δ mit $\Delta \cap P = Q$ gibt.

Aufgabe 5

Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller atomaren Formeln. Zeigen Sie, dass es genauso viele Teilmengen von P wie maximal konsistente Mengen gibt.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgaben 3 und 4.

Aufgabe 6*

3 Punkte

Zeigen Sie

$$\{\, \varphi \vee \chi, \neg\chi \vee \psi \,\} \vdash \varphi \vee \psi$$

durch Angabe einer geeigneten Deduktion.

Aufgabe 7

Wir betrachten in dieser Aufgabe Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_2$[1] bzw. $\mathbb{Z}$ mit Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass ein abzählbares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn bereits jedes endliche Teilsystem lösbar ist. Eine analoge Aussage für die ganzen Zahlen gilt hingegen nicht.
Sei $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ die Menge der atomaren Formeln. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Belegungen, welche auf ganz P definiert sind. Aufgabenteile (a_1) bis (a_6) behandeln den Restklassenring $\mathbb{Z}_2$; (b_1) und (b_2) widmen sich Gleichungssystemen über $\mathbb{Z}$.

(a_1) Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3 = 1. \tag{†}$$

Geben Sie eine Formel φ derart an, dass φ genau dann unter einer Belegung $\mathcal{B}$ gilt, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (†) ist (wobei $\mathcal{B}(p_i)$ als Element aus $\mathbb{Z}_2$ aufgefasst wird).

(a_2) Ein *Monom*[2] ist ein endliches Produkt von Potenzen von Variablen (zum Beispiel $x_1\, x_2^2\, x_4$). Wir schreiben $M(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Monoms M unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i \geq 1$ und $v_i \in \mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Monom M eine Formel φ_M derart an, dass für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_M) = 1 \quad \text{gdw.} \quad M(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots) = 1.$$

(a_3) Ein *multivariates Polynom* ist eine endliche Summe von Monomen (zum Beispiel $x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3$). Analog zu oben schreiben wir $P(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Polynoms P unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i \geq 1$ und $v_i \in \mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Polynom P eine Formel φ_P derart an, dass für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_P) = 1 \quad \text{gdw.} \quad P(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots) = 1.$$

(a_4) Eine *Gleichung* hat die Form

$$P = c,$$

wobei P ein multivariates Polynom und $c \in \mathbb{Z}_2$ eine Konstante ist.
Geben Sie für jede Gleichung (E) eine Formel $\varphi_{(E)}$ derart an, dass $\varphi_{(E)}$ genau dann unter einer Belegung $\mathcal{B}$ gilt, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (E) ist.

(a_5) Sei (G) ein abzählbares System von Gleichungen (E_i) für $i \in I$ und $I \subseteq \mathbb{N}$. Geben Sie eine Menge $\Gamma_{(G)}$ von Formeln so an, dass für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\gamma) = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma_{(G)} \quad \text{gdw.} \quad x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots \text{ eine Lösung für (G) ist.}$$

(a_6) Folgern Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass ein abzählbares Gleichungssystem (G) genau dann lösbar ist, wenn jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung besitzt.

(b_1) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem (G) über $\mathbb{Z}$ (zur Vereinfachung verwenden wir Variablen $x_i, a_i, \ldots, d_i$ und z):

$$\begin{aligned} &x_1 &&= 1 \\ &x_{i+1} &&= x_i + 1 &&\text{für alle } i \geq 1 \\ &x_i + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 &&= z &&\text{für alle } i \geq 1 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt.

Hinweis. Verwenden Sie den Vier-Quadrate-Satz.

(b_2) Zeigen Sie, dass das vollständige Gleichungssystem (G) aus Aufgabenteil (b_1) hingegen *keine* Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt.

---

[1] $\mathbb{Z}_2$ ist der Ring $(\{0,1\}, +, \cdot, 0, 1)$ mit Addition und Multiplikation modulo 2.
[2] Wir betrachten ausschließlich Monome über $\mathbb{Z}_2$, d.h. die Reihenfolge der Faktoren ist irrelevant.