TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 5

Abgabe bis zum 10. November um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1* 1+1+2+3 Punkte

Für eine endliche Menge P von atomaren Formeln sei $n(P)$ die Anzahl der paarweise nicht äquivalenten[1] aussagenlogischen Formeln mit atomaren Formeln aus P. Zum Beispiel sind für eine einelementige Menge $P = \{p\}$ die Formeln $p, \neg p, \bot$ und $\neg \bot$ paarweise nicht äquivalent. Jede weitere Formel enthält entweder eine zusätzliche atomare Formel verschieden von p oder ist äquivalent zu einer der obigen vier Formeln – d.h. $n(\{p\}) = 4$. Wir möchten in dieser Aufgabe den genauen Wert von $n(P)$ bestimmen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, welche unter einer passenden Belegung $\mathcal{B}$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(q) = 1$ und $\mathcal{B}(r) = 0$ ist.

(b) Gegeben sei die folgende Wahrheitswertetabelle:

$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(q)$	$\mathcal{B}(r)$	$*$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Geben Sie eine Formel an, deren Wahrheitswerteverlauf dem von Spalte $*$ entspricht.

(c) Sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl und $f : \{0,1\}^k \longrightarrow \{0,1\}$ eine Abbildung. Geben Sie eine Formel φ_f an, welche ausschließlich die atomaren Formeln $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verwendet und für welche

$$\mathcal{B}(\varphi_f) = f\big(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots, \mathcal{B}(p_k)\big)$$

für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

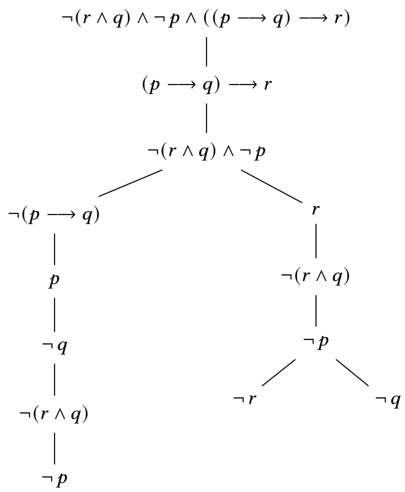
Hinweis: Die Tabelle aus Aufgabenteil (b) kann als Funktion $f : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$ aufgefasst werden (mit $f(0,0,0) = 1$, $f(0,0,1) = 0$, usw.).

(d) Bestimmen Sie $n(P)$.

[1] Zwei Formeln φ, ψ heißen *äquivalent*, falls $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\psi)$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Aufgabe 2* 2 Punkte

Gegeben sei das nachfolgende Tableau T. Kennzeichnen Sie die verwendeten Regeln und entscheiden Sie, ob T geschlossen und/oder vollständig expandiert ist. Ist $\neg(r \wedge q) \wedge \neg p \wedge ((p \longrightarrow q) \longrightarrow r)$ erfüllbar?



Aufgabe 3* 1+1+1 Punkte

Seien p, q, r, s paarweise verschiedene atomare Formeln. Entscheiden Sie mithilfe des Tableau-Kalküls (Folien 5.6ff), ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind. Geben Sie gegebenenfalls eine erfüllende Belegung an.

(a) $\neg(p \vee r) \wedge s \wedge (\neg p \vee (s \longrightarrow q)) \wedge \neg q$ ist erfüllbar

(b) $\{\neg(\neg p \vee (q \wedge r)),\ (p \vee \neg r) \longrightarrow q,\ \neg r\}$ ist unerfüllbar

(c) $\{p \vee q,\ \neg p,\ q \longrightarrow r\} \models q \wedge r$

Aufgabe 4* 3 Punkte

Zeigen Sie

$$\{\, p \vee (\neg p \wedge q),\ q \longrightarrow r \,\} \vdash \neg p \longrightarrow r$$

durch Angabe einer geeigneten Deduktion.

Aufgabe 5

Geben Sie je eine Deduktion für $\{\varphi \longrightarrow \psi\} \vdash \neg \psi \longrightarrow \neg \varphi$ und für $\{\neg \psi \longrightarrow \neg \varphi\} \vdash \varphi \longrightarrow \psi$ an.