

Logik und Logikprogrammierung – Übung 7

Abgabe bis zum 24. November um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.

Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1*

2 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe erneut den Operator $\varphi ? \psi : \chi$ ("falls φ dann ψ , sonst χ ") aus Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes. Erweitern Sie den Tableau-Kalkül um zwei Regeln für $\varphi ? \psi : \chi$ bzw. $\neg(\varphi ? \psi : \chi)$. Verwenden Sie dabei die Notation von Folie 5.6.

Aufgabe 2*

2 Punkte

Gegeben sei die Formelmenge

$$\{ r \longrightarrow q, (p \wedge s) \vee (r \wedge s), (q \wedge r) \longrightarrow \perp, (s \wedge q) \longrightarrow p, \neg r \longrightarrow \neg s \}.$$

Geben Sie eine äquivalente¹ Menge Γ von Klauseln an und zeigen Sie mithilfe des Resolutions-Kalküls, dass $\Gamma \models p \vee t$ gilt.

Aufgabe 3

Gegeben sei die geordnete Menge $\Gamma = \{(\neg p, \neg q, \neg r), (p, \neg s), (p, \neg q), (q, \neg r), (r), (s, \neg p)\}$ von Hornklauseln (wir fassen Klauseln hier als Tupel auf; vgl. Folie 7.28). Geben Sie eine Horn-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion \square an. Gibt es auch eine SLD-Resolution mit Hypothesen aus Γ und Konklusion \square ?

Aufgabe 4*

5 Punkte

Gegeben sei die folgende Resolutions-Refutation:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\{p, \neg s\} \quad \{s, \neg q\}}{\{p, \neg q\}}}{\{p, \neg r, \neg s\}}}{\{p, \neg r, \neg s\}} \quad \{s\}}{\{p, \neg r, \neg s\}} \quad \frac{\frac{\{s, \neg q\} \quad \{r, \neg s\}}{\{r, \neg q\}}}{\{r, \neg q\}} \quad \{q\}}{\{r, \neg q\}} \quad \{r\}}{\{p, \neg r, \neg s\}} \quad \{q\}}{\square}$$

Sei Γ die Menge der Hypothesen der obigen Resolutions-Ableitung. Dann ist Γ eine Menge von Hornklauseln und mit Lemma 7.17 folgt, dass es eine Horn-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion \square gibt. Führen Sie die auf Folien 7.11–7.14 beschriebenen Umformungsschritte durch, um eine solche Horn-Ableitung zu bestimmen. Geben Sie nach jedem "Hornifizierungsschritt" (Folie 7.11) ein Zwischenergebnis an.

Aufgabe 5*

3 Punkte

Gegeben sei die Formel $\varphi = (p \vee q) \longrightarrow \neg r$. Geben Sie den Syntaxbaum für φ an und bestimmen Sie das Ergebnis φ' der Tseitin-Konstruktion (Folien 8.2ff) für φ .

¹Wir nennen zwei Mengen Γ, Δ von Formeln *äquivalent*, falls für alle passenden Belegungen \mathcal{B} gilt: $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$ gdw. $\mathcal{B}(\delta) = 1$ f.a. $\delta \in \Delta$.

Aufgabe 6 (Syntax der Prädikatenlogik)*

3 Punkte

Wir betrachten die Signatur Σ der Graphen (vgl. Folie 9.21), d.h. Σ besitzt ausschließlich das zweistellige Relationssymbol E . Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

- (a) Geben Sie zu jeder der folgenden Graph-Eigenschaften eine Σ -Aussage an, welche diese beschreibt:
- (i) Es gibt (wenigstens) einen Knoten vom Grad ≥ 2 .
 - (ii) Es gibt (wenigstens) zwei isolierte Knoten (d.h. zwei Knoten vom Grad 0).
 - (iii) Es gibt keinen Weg² der Länge > 2 .

Bemerkung. Wir betrachten ausschließlich schlingenlose ungerichtete Graphen.

- (b) Geben Sie zu jeder der folgenden Σ -Formeln eine möglichst kurze verbale Beschreibung an:
- (i) $\forall x \exists y: (\neg E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$
 - (ii) $\exists y \forall x: (\neg E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$
 - (iii) $\exists x \forall y: (x = y \vee E(x, y) \vee \exists z: (E(x, z) \wedge E(z, y)))$

Aufgabe 7 (Semantik der Prädikatenlogik)

Sei wieder Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

- (a) $\{\exists x \exists y \exists z: (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, x))\}$ ist erfüllbar.
- (b) $\{\exists x \forall y: (y = x \vee E(x, y))\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.
- (c) $\{\forall x \forall y: (E(x, y) \longrightarrow \neg E(y, x))\} \models \forall x \forall y: ((E(x, y) \wedge E(y, x)) \longrightarrow x = y)$.
- (d) $\{\forall x \forall y: (E(x, y) \vee E(y, x))\} \models \exists x \exists y: (E(x, y) \wedge \neg(x = y))$.

²Ein Weg der Länge k ist eine Folge u_0, u_1, \dots, u_k von paarweise verschiedenen Knoten, so dass je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.