TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 8

Abgabe bis zum 01. Dezember um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.
Version 2

Aufgabe 1* — 4 Punkte

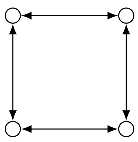
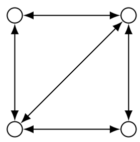
Sei Σ eine Signatur mit zwei einstelligen Relationssymbolen P, Q, sowie einem nullstelligen Funktionssymbol a. Entscheiden Sie für die folgenden Σ-Formeln, ob diese nicht erfüllbar[1], allgemeingültig, oder erfüllbar aber nicht allgemeingültig sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\forall x\colon \big(P(x) \lor \neg Q(x)\big)$
(b) $\exists x \exists y\colon \big(x \neq y \land \big(P(x) \longleftrightarrow \neg Q(y)\big)\big)$
(c) $\neg P(a) \land \forall x\colon P(x)$
(d) $\forall x\colon \big(P(x) \longrightarrow \exists y\colon Q(y)\big)$

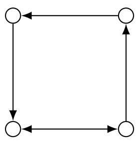
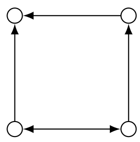
Aufgabe 2* — 3 Punkte

Sei Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Geben Sie für jedes der folgenden Paare G, H von Graphen je eine Σ-Aussage φ an, sodass $\mathcal{A}_G$ Modell für φ ist, aber $\mathcal{A}_H$ hingegen nicht.

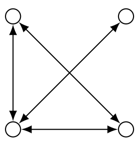
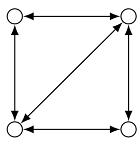
(a)

G  H 

(b)

G  H 

(c)

G  H 

Aufgabe 3* — 3 Punkte

Sei Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Geben Sie zu jeder der folgenden Σ-Aussagen gerichtete Graphen G, H mit je wenigstens vier Ecken derart an, dass $\mathcal{A}_G$ ein Modell für diese Formel bildet, aber $\mathcal{A}_H$ hingegen nicht.

(a) $\forall x \exists y\colon \Big(E(x,y) \land \neg E(y,x)\Big)$

(b) $\exists x \forall y \forall z\colon \Big(E(x,y) \longleftrightarrow E(x,z)\Big)$

(c) $\forall x \exists y\colon \Big(E(x,y) \land \forall z\colon \big(y = z \lor \neg E(y,z)\big)\Big)$

[1] Eine Formel φ heißt erfüllbar, falls $\{\varphi\}$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4* $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Sei Σ die Signatur der Datenbank von Folie 9.4ff. Beschreiben Sie jede der folgenden Eigenschaften durch eine Σ-Aussage:

(a) Es gibt genau zwei Professoren.
(b) Es gibt eine jüngste Person.
(c) Es gibt zwei gleichaltrige Studenten.
(d) Bis auf (höchstens) eine Ausnahme nehmen alle Studenten, welche an der Veranstaltung LuLP teilnehmen auch an der Veranstaltung AuD teil.
(e) Es gibt zwei Studenten, welche gegenseitig am besten miteinander über Informatik reden können.

Aufgabe 5

Sei Σ eine Signatur mit einem einstelligen Relationssymbol R, einem einstelligen Funktionssymbol f, sowie einem nullstelligen Funktionssymbol a. Zeigen Sie, dass $\forall x \exists y\colon f(x) = y$ und $\exists x\colon \big(P(x) \longrightarrow P(a)\big)$ Theoreme sind.