TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 9

Abgabe bis zum 08. Dezember um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Sei Σ eine Signatur mit zwei einstelligen Relationssymbolen P, Q, sowie einem nullstelligen Funktionssymbol a. Entscheiden Sie für die folgenden Σ-Formeln, ob diese nicht erfüllbar[1], allgemeingültig, oder erfüllbar aber nicht allgemeingültig sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\forall x\colon \big(P(x) \land \neg Q(x)\big) \land \exists x\colon \big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big)$
(b) $\forall x\colon \big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big) \lor \exists x\colon \neg Q(x)$
(c) $\forall x \forall y\colon \big(P(x) \lor \neg P(y)\big)$
(d) $\big(\forall x\colon (\neg P(a) \longrightarrow P(x))\big) \longrightarrow P(a)$

(e) Selbststudium: $\neg P(x) \lor \exists y\colon P(y)$
(f) Selbststudium: $\neg P(x) \land \exists y\colon P(y)$
(g) Selbststudium: $\neg P(x) \lor \forall y\colon P(y)$

Aufgabe 2

Sei Σ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $\leq$. Geben Sie zu jedem der nachfolgenden Paare $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ von Σ-Strukturen je eine Aussage derart an, dass genau eine der beiden Strukturen ein Modell für diese Formel bildet. Die Relationen $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ bezeichnen dabei die übliche bzw. komponentenweise Ordnung auf $U_{\mathcal{A}}$ bzw. $U_{\mathcal{B}}$.

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \leq^{\mathcal{B}})$
(b) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq^{\mathcal{B}})$
(c) $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Q}, \leq^{\mathcal{B}})$
(d) $\mathcal{A} = (\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}, \leq^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (\{0,1\} \times \{0,1,2,3\}, \leq^{\mathcal{B}})$

Aufgabe 3*

4 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden, inkorrekten Deduktionen je einen falschen Ableitungsschritt an und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y\colon x + 1 = y}{\exists y\colon y + 1 = y}\,(\forall \mathrm{E}) \qquad \dfrac{[y + 1 = y]^1 \qquad y = 0}{0 + 1 = 0}\,(\mathrm{GfG})}{0 + 1 = 0}\,(\exists \mathrm{E})^1$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y = y}\,(\mathrm{R})}{\forall y\colon y = y}\,(\forall \mathrm{I})}{\exists x \forall y\colon x = y}\,(\exists \mathrm{I})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg \forall x\colon P(x)]^2 \qquad \dfrac{[P(x)]^1}{\forall x\colon P(x)}\,(\forall \mathrm{I})}{\bot}\,(\neg \mathrm{E})}{\neg P(x)}\,(\neg \mathrm{I})^1}{\forall x\colon \neg P(x)}\,(\forall \mathrm{I})}{\neg \forall x\colon P(x) \longrightarrow \forall x\colon \neg P(x)}\,(\to \mathrm{I})^2$$

[1]Eine Formel φ heißt erfüllbar, falls $\{\varphi\}$ erfüllbar ist.

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\colon P(x)]^2 \qquad [P(x)]^1}{P(x)}\ (\exists\mathrm{E})^1}{\forall x\colon P(x)}\ (\forall\mathrm{I})}{\exists x\colon P(x) \longrightarrow \forall x\colon P(x)}\ (\to\mathrm{I})^2$$

Aufgabe 4* 3 Punkte

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik den Induktionsschritt für den Fall (GfG) an.

Hinweis. Verwenden Sie Lemma 10.12.

Aufgabe 5* 4 Punkte

Sei Σ eine Signatur mit zwei einstelligen Relationssymbolen P, Q, sowie zwei einstelligen Funktionssymbolen f, g. Zeigen Sie die folgenden syntaktischen Folgerungen je durch Angabe einer geeigneten Deduktion:

(a) $\left\{ \forall x\colon \big(P(x) \longrightarrow Q(g(x))\big),\ \exists y\colon P(g(y)) \right\} \vdash \exists x\colon Q(x)$

(b) $\left\{ \forall x\colon g(x) = x \right\} \vdash \forall x\colon g(f(x)) = f(g(x))$

(c) Selbststudium: $\left\{ \forall x \exists x'\colon f(x) = g(x'),\ \exists z\colon P(f(z)) \right\} \vdash \exists z'\colon P(g(z'))$

(d) Selbststudium: $\left\{ \forall x \exists x'\colon f(x) = g(x'),\ \forall x\colon P(g(x)) \right\} \vdash \forall x\colon P(f(x))$