TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2022/2023

Logik und Logikprogrammierung – Übung 10

Abgabe bis zum 15. Dezember um 13:00 Uhr vor der Vorlesung bzw. im Briefkasten.
Nur für die mit * markierten Aufgaben können Bonuspunkte verdient werden.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Sei Σ die Signatur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$. Geben Sie zu jeder der Strukturen $(\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Z}, +^{\mathbb{Z}}, \cdot^{\mathbb{Z}})$, $(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ und $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}})$ je eine Σ-Aussage an, welche in dieser Struktur, aber keiner der drei anderen gilt.

Bemerkung: Sie dürfen in Ihren Formeln die Infixnotation für $+$ und $\cdot$ verwenden (z.B. $x + y$).

Aufgabe 2* — 1+1+2 Punkte

Sei Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Wir möchten in dieser Aufgabe zeigen, dass es keine Σ-Aussage φ mit der Eigenschaft gibt, dass $\mathcal{A}_G \models \varphi$ in einem Graphen G genau dann gilt, wenn alle Knoten in G beschränkten Ausgangsgrad haben[1]. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie für jedes $d \in \mathbb{N}$ eine Σ-Aussage φ_d derart an, dass $\mathcal{A}_G \models \varphi_d$ für einen Graphen G genau dann gilt, wenn es in G einen Knoten mit Ausgangsgrad $\geq d$ gibt.

(b) Geben Sie eine unendliche Menge Φ von Σ-Aussagen derart an, dass $\mathcal{A}_G \models \Phi$ für einen Graphen G genau dann gilt, wenn es in G Knoten mit beliebig hohem Ausgangsgrad gibt.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keine Σ-Aussage ψ gibt, für welche $\mathcal{A}_G \models \psi$ für einen Graphen G genau dann gilt, wenn alle Knoten in G beschränkten Ausgangsgrad haben.

    Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Σ-Aussage ψ gibt und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von $\Phi \cup \{\psi\}$ unter Verwendung des Kompaktheitssatzes einen Widerspruch her.

Aufgabe 3* — 1+1 Punkte

Sei Σ eine Signatur mit zwei einstelligen Funktionssymbolen f und g. Zeigen Sie die folgenden syntaktischen Folgerungen je durch Angabe einer geeigneten Deduktion:

(a) $\big\{\forall x\colon f(g(x)) = x, \forall y\colon g(f(y)) = y\big\} \vdash \forall y \exists x\colon f(x) = y$

(b) $\big\{\forall x\colon f(g(x)) = x, \forall y\colon g(f(y)) = y\big\} \vdash \forall x, x'\colon f(x) = f(x') \longrightarrow x = x'$

Aufgabe 4* — 3 Punkte

Sei Σ eine Signatur mit Funktionssymbolen a, f und g, wobei g zweistellig, f einstellig und a nullstellig ist. Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus von Folie 12.20 um für die folgenden Mengen von Termpaaren zu entscheiden, ob diese unifizierbar sind. Geben Sie nach jedem Transformationsschritt ein Zwischenergebnis an und bestimmen Sie im positiven Fall einen allgemeinsten Unifikator.

(a) $\big\{\ \big(g(y,x),\ g(f(z),x)\big),\ \big(g(x,y),\ g(a,z)\big)\ \big\}$

(b) $\big\{\ \big(f(g(x,f(a))),\ f(z)\big),\ \big(g(y,f(y)),\ z\big),\ \big(f(x),\ f(a)\big)\ \big\}$

[1] D.h. falls es eine Konstante $c_G \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle Knoten Ausgangsgrad $\leq c_G$ haben.

Aufgabe 5* 1+1+1 Punkte

Seien Σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine beliebige aber feste Σ-Struktur. Wir betrachten in dieser Aufgabe ausschließlich Σ-Formeln in welchen höchstens die Variablen x und y frei vorkommen. Für jede solche Formel φ definieren wir (in $\mathcal{A}$) die Relation $||\varphi|| \subseteq U_{\mathcal{A}}^2$ der Menge der Paare $(u, v) \in U_{\mathcal{A}}^2$ mit $\mathcal{A} \models_{\varrho[x \mapsto u][y \mapsto v]} \varphi$ für alle Variableninterpretationen ϱ. Zeigen bzw. vervollständigen Sie die folgenden Gleichheiten:

(1) $||\neg\varphi|| = U_{\mathcal{A}}^2 \setminus ||\varphi||$
(2) $||\varphi \vee \psi|| = ||\varphi|| \cup ||\psi||$
(3) $||\varphi \longrightarrow \psi|| = \dots$
(4) (Präsenz) $||\varphi \longleftrightarrow \psi|| = \dots$
(5) (Präsenz) $||\exists x \colon \varphi|| = \dots$
(6) (Präsenz) $||\forall x \colon \varphi|| = \dots$

Vervollständigen Sie die folgenden Äquivalenzen um einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen $||\varphi||$ und $||\psi||$ (z.B. $\mathcal{A} \models \forall x \colon \varphi$ gdw. $||\varphi|| = U_{\mathcal{A}}$):

(7) (Präsenz) $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \colon (\varphi \vee \psi)$ gdw. …
(8) (Präsenz) $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \colon (\varphi \longrightarrow \psi)$ gdw. …
(9) (Präsenz) $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \colon \varphi$ gdw. …
(10) (Präsenz) $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \colon (\varphi \longrightarrow \psi)$ gdw. …

Aufgabe 6

Wir erweitern die Signatur der Datenbank von Folie 9.4ff um die Relation $\mathrm{B}(x, y)$ mit der Bedeutung "x und y sind befreundet" und bezeichnen die resultierende Struktur (Datenbank) mit $\mathcal{A}$.
Eine Anfrage an die Datenbank ist eine Formel φ mit freien Variablen aus $\{x, y\}$. Sie bestimmt die Menge $||\varphi||$ der Paare $(u, v) \in U_{\mathcal{A}}^2$ mit $\mathcal{A} \models_{\varrho[x \mapsto u][y \mapsto v]} \varphi$ für alle Variableninterpretationen ϱ (vgl. Aufgabe 5)[2]. Geben Sie zu jeder der folgenden verbalen Anfragen je eine Formel an:

(a) Die Menge der Paare von Studenten, welche dieselben Freunde haben.
(b) Die Menge der Paare gleichaltriger Studenten, welche an denselben Veranstaltungen teilnehmen.
(c) Die Menge der Studenten, welche einen gleichaltrigen Freund haben, der an denselben Veranstaltungen teilnimmt.
(d) Die Menge der Paare von Studenten, welche selbst nicht befreundet sind, aber einen gemeinsamen Freund haben.
(e) Die Menge der Studenten, welche an der Veranstaltung LuLP teilnehmen und welche am besten mit einem Freund über Informatik reden können.

[2]Kommt nur x frei in φ vor, so können wir $||\varphi||$ als Menge der $u \in U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \models_{\varrho[x \mapsto u]} \varphi$ für alle ϱ, d.h. als Teilmenge von $U_{\mathcal{A}}$ auffassen.