Logik und Logikprogrammierung
4. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

Erfüllbare Mengen

Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Formeln. Dann ist Δ erfüllbar.

Beweis:
Definiere eine Belegung $\mathcal{B}$ mittels

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_i \in \Delta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen für alle Formeln φ:

$$\mathcal{B}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Delta \qquad (*)$$

Der Beweis erfolgt per Induktion über die Länge von φ.

- IA hat φ die Länge 1, so ist φ atomare Formel. Hier gilt (*) nach Konstruktion von $\mathcal{B}$.
- IV Gelte (*) für alle Formeln der Länge $< n$.
- IS Sei φ Formel der Länge $n > 1$.

  $\Longrightarrow$ Es gibt Formeln α und β der Länge $< n$ mit $\varphi \in \{\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta\}$.

  Wir zeigen (*) für diese vier Fälle einzeln auf den folgenden Folien.

Zur Erinnerung: Δ max. konsistent, φ Formel

- Lemma 1: $\Delta \vdash \varphi \implies \varphi \in \Delta$
- Lemma 2: $\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$

1. $\varphi = \neg\alpha$.

$$\mathcal{B}(\varphi) = 1 \iff \mathcal{B}(\alpha) = 0 \overset{\text{IV}}{\iff} \alpha \notin \Delta \overset{\text{Lemma 2}}{\Longleftrightarrow} \Delta \ni \neg\alpha = \varphi$$

2. $\varphi = \alpha \wedge \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = 1 \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \alpha, \beta \in \Delta$
     $\Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$ denn $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge\mathrm{I})$ ist Deduktion $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \varphi \in \Delta$.
   - $\varphi \in \Delta$

     $\Longrightarrow \Delta \vdash \alpha$ und $\Delta \vdash \beta$ denn $\dfrac{\varphi}{\alpha}\,(\wedge\mathrm{E}_1)$ und $\dfrac{\varphi}{\beta}\,(\wedge\mathrm{E}_2)$ sind Deduktionen.
     $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \alpha, \beta \in \Delta \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1$

3. $\varphi = \alpha \vee \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1$
     - angenommen, $\mathcal{B}(\alpha) = 1 \overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \alpha \in \Delta$

       $\Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$ denn $\dfrac{\alpha}{\varphi}\,(\vee I_1)$ ist Deduktion $\xrightarrow{\text{Lemma 1}} \varphi \in \Delta$
     - angenommen, $\mathcal{B}(\alpha) = 0 \Rightarrow \mathcal{B}(\beta) = 1$. weiter analog.
   - $\varphi \in \Delta$. Dann gilt $\Delta \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\} \vdash \bot$ aufgrund der Deduktion

$$\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{\neg\alpha \quad [\alpha]^4}{\bot}\,(\neg E) \qquad \dfrac{\neg\beta \quad [\beta]^4}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\vee E)^4$$

Da Δ konsistent ist, folgt $\Delta \neq \Delta \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}$ und damit $\neg\alpha \notin \Delta$ oder $\neg\beta \notin \Delta$.

$\Longrightarrow \alpha \in \Delta$ oder $\beta \in \Delta$ nach Lemma 2

$\overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\alpha) = 1$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1$

$\Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1$.

4. $\varphi = \alpha \to \beta$.
   - $\mathcal{B}(\varphi) = 1 \implies \mathcal{B}(\alpha) = 0$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1$

     $\overset{\text{IV}}{\implies} \neg\alpha \in \Delta$ oder $\beta \in \Delta$

Aufgrund nebenstehender Deduktionen gilt in beiden Fällen $\Delta \vdash \alpha \to \beta$.

$\xRightarrow{\text{Lemma 1}} \varphi \in \Delta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \quad [\alpha]^5}{\bot}}{\beta}(\bot)}{\alpha \to \beta}(\to\mathrm{I})^5 \qquad \dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}(\to\mathrm{I})$$

   - $\varphi \in \Delta$.
     Angenommen, $\mathcal{B}(\varphi) = 0 \implies \mathcal{B}(\alpha) = 1, \mathcal{B}(\beta) = 0$

     $\overset{\text{IV}}{\implies} \alpha \in \Delta, \beta \notin \Delta \xRightarrow{\text{Lemma 2}} \neg\beta \in \Delta$

     Aufgrund der nebenstehenden Deduktion gilt $\Delta \vdash \bot$, d.h. Δ ist inkonsistent, im Widerspruch zur Annahme.

     $\implies \mathcal{B}(\varphi) = 1$

$$\dfrac{\neg\beta \qquad \dfrac{\alpha \quad \varphi}{\beta}(\to\mathrm{E})}{\bot}(\neg\mathrm{E})$$

$\square$

Satz (Vollständigkeitssatz)

Sei Γ eine Formelmenge und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi\,.$$

Insbesondere ist jede Tautologie ein Theorem.

Beweis: indirekt

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models \varphi \\
\Downarrow \text{(Folie 3.22)} & & \Uparrow \text{(Folie 3.9)} \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 3.25)} & & \Uparrow \text{(klar)} \\
\exists \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & \underset{\text{(Folie 4.2)}}{\Longrightarrow} & \Delta \text{ erfüllbar}
\end{array}$$

Vollständigkeit und Korrektheit

Satz

Seien Γ eine Formelmenge und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi\,.$$

Insbesondere:

- φ ist Theorem $\iff$ φ ist Tautologie
- $\Gamma \vdash \bot \iff \Gamma$ ist unerfüllbar

Beweis: Folgt unmittelbar aus Korrektheitssatz auf Folie 3.19 und Vollständigkeitssatz auf Folie 4.7. □

Folgerung 1: Entscheidbarkeit

Satz

Es gibt einen Algorithmus mit folgendem Verhalten:
Eingabe: endliche Formelmenge Γ und Formel φ
Frage: Gilt $\Gamma \vdash \varphi$?

Beweis: Sei V die Menge der atomaren Formeln, die in einer Formel aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ vorkommen. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi$$

$$\iff \Gamma \models \varphi$$

$$\iff \text{für alle Belegungen } \mathcal{B}\colon V \to \{0,1\} \text{ mit } \mathcal{B}(\gamma) = 1 \text{ f.a. } \gamma \in \Gamma \text{ gilt } \mathcal{B}(\varphi) = 1$$

Da es nur endlich viele solche Abbildungen gibt, kann ein Algorithmus dies überprüfen. Um „Ja“ auszugeben, benötigt er aber exponentielle Zeit. $\square$

Folgerung 2: Kompaktheit

Satz

Seien Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln und φ eine Formel mit $\Gamma \models \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \models \varphi$.

Beweis:

$\Gamma \models \varphi$

$\Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ (nach dem Vollständigkeitssatz von Folie 4.7)

$\Longrightarrow$ es gibt Deduktion von φ mit Hypothesen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$

$\Longrightarrow \Gamma' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \vdash \varphi$

$\Longrightarrow \Gamma' \models \varphi$ (nach dem Korrektheitssatz von Folie 3.19). $\square$

Folgerung (Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz)

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar } \iff \exists\, \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich: } \Gamma' \text{ unerfüllbar}$$

Beweis:

Γ unerfüllbar

$\iff$ $\Gamma \cup \{\neg\bot\}$ unerfüllbar

$\iff$ $\Gamma \models \bot$ (Folie 3.9)

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: $\Gamma' \models \bot$

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: $\Gamma' \cup \{\neg\bot\}$ unerfüllbar (Folie 3.9)

$\iff$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich: Γ' unerfüllbar $\square$

1. Anwendung des Kompaktheitsatzes: Färbbarkeit

Definition

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer Menge V und $E \subseteq \binom{V}{2} = \{X \subseteq V : |X| = 2\}$.

Für $W \subseteq V$ sei $G{\upharpoonright}_W = \left(W, E \cap \binom{W}{2}\right)$ der von W induzierte Teilgraph.

Der Graph G ist 3-färbbar, wenn es eine Abbildung $f\colon V \to \{1, 2, 3\}$ gibt mit $f(v) \neq f(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$.

Satz

Sei $G = (\mathbb{N}, E)$ ein Graph. Dann sind äquivalent

(1) G ist 3-färbbar.

(2) Für jede endliche Menge $W \subseteq \mathbb{N}$ ist $G{\restriction}_W$ 3-färbbar.

Beweis:

„(1)$\Rightarrow$(2)“ trivial

„(2)$\Rightarrow$(1)“ Sei nun, für alle endlichen Menge $W \subseteq \mathbb{N}$, der induzierte Teilgraph $G{\restriction}_W$ 3-färbbar.

Wir beschreiben zunächst mit einer unendlichen Menge Γ von Formeln, daß eine 3-Färbung existiert:

atomare Formeln $p_{n,c}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \{1, 2, 3\}$
(Idee: der Knoten n hat die Farbe c)

Γ enthält die folgenden Formeln:

- für alle $n \in \mathbb{N}$: $p_{n,1} \vee p_{n,2} \vee p_{n,3}$
  (der Knoten n ist gefärbt)
- für alle $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\bigwedge_{1 \leq c < d \leq 3} \neg(p_{n,c} \wedge p_{n,d})$
  (der Knoten n ist nur mit einer Farbe gefärbt)
- für alle $\{m, n\} \in E$: $\displaystyle\bigwedge_{1 \leq c \leq 3} \neg(p_{m,c} \wedge p_{n,c})$
  (verbundene Knoten m und n sind verschieden gefärbt)

Behauptung: Jede endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar.

Begründung:
Da Δ endlich ist, existiert endliche Menge $W \subseteq \mathbb{N}$, so daß jede atomare Formel in Δ die Form $p_{n,c}$ für ein $n \in W$ und ein $c \in \{1, 2, 3\}$ hat.

Nach Annahme existiert $f_W \colon W \to \{1, 2, 3\}$ mit $f_W(m) \neq f(n)$ f.a. $\{m, n\} \in E \cap \binom{W}{2}$.

Definiere $\mathcal{B} \colon \{p_{n,c} \mid n \in W, 1 \leq c \leq 3\} \to \{0, 1\}$ durch

$$\mathcal{B}(p_{n,c}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_W(n) = c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Belegung erfüllt Δ, d.h. Δ ist erfüllbar, womit die Beh. gezeigt ist.

Nach dem Kompaktheitssatz ist also Γ erfüllbar.

Sei $\mathcal{B}$ erfüllende Belegung.

Für $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $c \in \{1, 2, 3\}$ mit $\mathcal{B}(p_{n,c}) = 1$. Setze $f(n) = c$.

Dann ist f eine gültige Färbung des Graphen G. $\square$

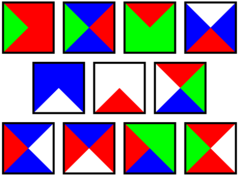
Idee

Gegeben ist eine Menge von quadratischen Kacheln mit gefärbten Kanten.

Ist es möglich, mit diesen Kacheln die gesamte Ebene zu füllen, so daß aneinanderstoßende Kanten gleichfarbig sind?

Berühmtes Beispiel

Mit diesen 11 Kacheln kann die Ebene gefüllt werden, aber dies ist nicht periodisch möglich.



Definition

Ein Kachelsystem besteht aus einer endlichen Menge C von „Farben" und einer Menge $\mathcal{K}$ von Abbildungen $\{\mathtt{N}, \mathtt{O}, \mathtt{S}, \mathtt{W}\} \to C$ von „Kacheln".

Eine Kachelung von $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Abbildung $f : G \to \mathcal{K}$ mit

- $f(i,j)(\mathtt{N}) = f(i,j+1)(\mathtt{S})$ für alle $(i,j),(i,j+1) \in G$
- $f(i,j)(\mathtt{O}) = f(i+1,j)(\mathtt{W})$ für alle $(i,j),(i+1,j) \in G$

Satz

Sei $\mathcal{K}$ ein Kachelsystem. Es existiert genau dann eine Kachelung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Kachelung von $\{(i,j) : |i|,|j| \leq n\}$ existiert.

Beweis: „$\Rightarrow$" trivial

„$\Leftarrow$“ Wir beschreiben zunächst mit einer unendlichen Menge Γ von Formeln, daß eine Kachelung existiert:

atomare Formeln $p_{k,i,j}$ für $k \in \mathcal{K}$ und $i, j \in \mathbb{Z}$
(Idee: an der Stelle (i, j) liegt die Kachel k, d.h. $f(i, j) = k$)

Für alle $(i, j) \in \mathbb{Z}$ enthält Γ die folgenden Formeln:

- eine der Kacheln aus $\mathcal{K}$ liegt an der Stelle (i, j): $\bigvee_{k \in \mathcal{K}} p_{k,i,j}$
- es liegen nicht zwei verschiedene Kacheln an der Stelle (i, j):
$$\bigwedge_{k,k' \in \mathcal{K}, k \neq k'} \neg(p_{k,i,j} \wedge p_{k',i,j})$$
- Kacheln an Stellen (i, j) und $(i, j + 1)$ „passen übereinander“:
$$\bigvee_{k,k' \in \mathcal{K}, k(\mathtt{N}) = k'(\mathtt{S})} (p_{k,i,j} \wedge p_{k',i,j+1})$$
- Kacheln an Stellen (i, j) und $(i + 1, j)$ „passen nebeneinander“:
$$\bigvee (p_{k,i,j} \wedge p_{k',i+1,j})$$

Sei nun $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich.

$\Longrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß Δ nur atomare Formeln der Form $p_{k,i,j}$ mit $|i|, |j| \leq n$ enthält.

$\xRightarrow{\text{Voraussetzung}}$ es gibt Kachelung $g\colon \{(i,j) : |i|, |j| \leq n\} \to \mathcal{K}$

für $k \in \mathcal{K}$ und $|i|, |j| \leq n$ definiere

$$\mathcal{B}(p_{k,i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g(i,j) = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}(\delta) = 1$ für alle $\delta \in \Delta$ (da g Kachelung)

Also haben wir gezeigt, daß jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheitssatz}}$ es gibt Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$

$\Longrightarrow$ es gibt Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{K}$ mit $f(i,j) = k \iff \mathcal{B}(p_{k,i,j}) = 1$.

Wegen $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$ ist dies eine Kachelung. $\square$

Weitere Anwendungen des Kompaktheitsatzes

- abz. partielle Ordnungen sind linearisierbar
- abz. Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ lösbar
  $\iff$ jedes endliche Teilsystem lösbar (Übung)
- Heiratsproblem
- Kőnigs Lemma
- ...

Bemerkung: Der Kompaktheitssatz gilt auch, wenn die Menge der atomaren Formeln nicht abzählbar ist. Damit gelten die obigen Aussagen allgemeiner:

- 3-Färbbarkeit: beliebige Graphen
- Linearisierbarkeit: beliebige partielle Ordnungen
- Lösbarkeit: beliebig große Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_2$
- ...

Zusammenfassung 4. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- maximal konsistente Mengen sind erfüllbar (damit Abschluß des Beweises der Vollständigkeit)
- diverse Folgerungen aus Korrektheit und Vollständigkeit: Entscheidbarkeit und Kompaktheit (und damit Färbbarkeit, Parkettierung, ...)

kommende Vorlesung

- alternative Methode, Erfüllbarkeit zu entscheiden: Tableau