Logik und Logikprogrammierung
6. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

Resolution

Folie 4.9: Algorithmus für Frage, ob $\Delta \models \varphi$ gilt (für Δ endlich). Allerdings erfolgt Ausgabe „Ja" immer erst nach exponentiell vielen Schritten.

Ziel: Verfahren, das schneller ist.

Idee

$$\Delta \models \varphi \text{ gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \text{ unerfüllbar gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$$

$\rightarrow$ wir benötigen Test, ob $\bot$ aus Formelmenge Γ folgt

Der Resolutionskalkül stellt einen solchen Test für Mengen von „Klauseln" (dies sind Formeln spezieller Form) dar.

Definition

Eine Formel λ ist ein Literal, wenn sie $\bot$, atomar, oder Negation einer atomaren Formel ist (z.B. $\bot$, p, $\neg p$, aber nicht $\neg\bot$).

Eine Formel φ ist eine Klausel, wenn sie Disjunktion von Literalen ist (z.B. $\neg p$, $p \vee \bot \vee \neg q$, $\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg q$).

Eine Konjunktion von Klauseln heißt Formel in Konjunktiver Normalform oder in KNF.

Schreibeweise

Für die Klausel $\varphi = \lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \cdots \vee \lambda_n$ schreiben wir $\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \setminus \{\bot\}$

Für eine Belegung $\mathcal{B}$ sei $\mathcal{B}(\Phi) = \max\big(\{\mathcal{B}(\lambda) \mid \lambda \in \Phi\} \cup \{0\}\big)$, so daß $\mathcal{B}(\Phi) = \mathcal{B}(\varphi)$ gilt.

insbes. $\emptyset$ für $\bot$, die leere Klausel, hierfür auch $\square$

Für ein Literal $\lambda \neq \bot$ sei $\overline{\lambda}$ das folgende Literal:

$$\overline{\lambda} = \begin{cases} \neg p_i & \text{falls } \lambda = p_i \\ p_i & \text{falls } \lambda = \neg p_i \end{cases}$$

Seien Φ_1, Φ_2 und Ψ Klauseln. Dann heißt Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2, falls es ein Literal $\lambda \neq \bot$ gibt mit $\lambda \in \Phi_1$, $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ und

$$\Psi = \big(\Phi_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big)\,.$$

Sprechweise: Ψ wird aus Φ_1, Φ_2 nach λ resolviert.

Beispiel

$\{q, r\}$	ist Resolvente von	$\{p, q\}$	und	$\{\neg p, r\}$
$\{q\}$	ist Resolvente von	$\{p, q\}$	und	$\{\neg p, q\}$
$\Box$	ist Resolvente von	$\{p\}$	und	$\{\neg p\}$
$\{p, \neg p\}$	ist Resolvente von	$\{p, \neg p\}$	und	$\{\neg p, p\}$

$\{p, \neg p, r\}$ und $\{q, \neg q, r\}$ sind Resolventen von $\{p, \neg q, r\}$ und $\{\neg p, q\}$.

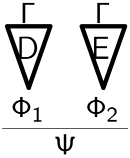
Definition

Sei Γ Klauselmenge und Ψ Klausel.

$$\Psi$$

ist Resolutions-Ableitung mit Hypothese Ψ und Konklusion Ψ.

Sind D und E Resolutions-Ableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ und ist Ψ eine Resolvente von Φ_1 und Φ_2, so ergibt sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ und Konklusion Ψ:



Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$, wenn es eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion Ψ gibt. Wir sagen „Ψ ist eine Resolutions-Folgerung von Γ“.

Eine Resolutions-Refutation ist eine Resolutionsableitung mit Konklusion $\Box$.

Lemma

Es gibt einen Algorithmus, der für eine endliche Klauselmenge Γ und eine Klausel Ψ feststellt, ob $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ gilt.

Beweis: Seien

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(\Gamma) &= \Gamma \cup \left\{ \Psi \;\middle|\; \frac{\Phi_1 \quad \Phi_2}{\Psi} \text{ für } \Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma \right\} \\
\mathrm{Res}^0(\Gamma) &= \Gamma \\
\mathrm{Res}^{n+1}(\Gamma) &= \mathrm{Res}\big(\mathrm{Res}^n(\Gamma)\big)
\end{aligned}$$

Γ endlich

$\Longrightarrow$ Menge V der in Γ vorkommenden atomaren Formeln ist endlich

$\Longrightarrow \left|\mathrm{Res}^n(\Gamma)\right| \leq 4^{|V|}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \left|\mathrm{Res}^k(\Gamma)\right| = \left|\mathrm{Res}^{k+1}(\Gamma)\right|$ f.a. $k \geq 4^{|V|}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi &\iff \exists k \in \mathbb{N} \colon \Psi \in \mathrm{Res}^k(\Gamma) \\
&\iff \exists k \in \{0, 1, \ldots, 4^{|V|}\} \colon \Psi \in \mathrm{Res}^k(\Gamma)
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma (Korrektheit der Resolution)

Sei Γ u.U. unendliche Klauselmenge und Ψ Klausel mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$.
Dann gilt $\Gamma \models \Psi$.
Insbes. ist Γ unerfüllbar, wenn Γ eine Resolutions-Refutation besitzt.

Beweis:

Per Induktion über den Aufbau der Resolutionsableitung:

I.A. Hat die Resolutionsableitung die Gestalt Ψ, so gilt $\Psi \in \Gamma$ und daher $\Gamma \models \Psi$.

I.S. Seien D und E Resolutionsableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ und sei Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2.
Dann existiert $\lambda \in \Phi_1$ mit $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ und $\Psi = \left(\Phi_1 \setminus \{\lambda\}\right) \cup \left(\Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\right)$.

Sei nun $\mathcal{B}$ Belegung mit $\mathcal{B}(\Phi) = 1$ f.a. $\Phi \in \Gamma$. Nach I.V. gilt $\mathcal{B}(\Phi_1) = \mathcal{B}(\Phi_2) = 1$. Um $\mathcal{B}(\Psi) = 1$ zu zeigen, unterscheiden wir, ob $\mathcal{B}(\lambda) = 0$ oder $\mathcal{B}(\lambda) = 1$ gilt:

- $\mathcal{B}(\lambda) = 0$: Wegen $\lambda \in \Phi_1$ und $\mathcal{B}(\Phi_1) = 1$ existiert $\lambda' \in \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \subseteq \Psi$ mit $\mathcal{B}(\lambda') = 1$, also $\mathcal{B}(\Psi) = 1$
- $\mathcal{B}(\lambda) = 1$: Dann gilt $\mathcal{B}(\overline{\lambda}) = 0$, weiter analog □

Die Umkehrung des Lemmas gilt leider nicht, d.h. nicht alle semantisch folgenden Klauseln folgen auch mittels Resolution.

Beispiel

Es gilt $\emptyset \models \{p, \neg p\}$, denn jede Belegung erfüllt die Klausel $p \vee \neg p$. Aber es gibt keine Resolutionsableitung mit Hypothesen in $\emptyset$, also gilt insbes. nicht $\emptyset \vdash_{\text{Res}} \{p, \neg p\}$.

Wir werden aber zeigen, daß die Umkehrung wenigstens für $\Psi = \Box$ gilt, d.h. wir zeigen

$$\Gamma \text{ unerfüllbar } \implies \Gamma \text{ besitzt eine Resolutions-Refutation.}$$

Lemma (Refutations-Vollständigkeit der Resolution)

Sei Γ endliche Klauselmenge mit $\Gamma \models \Box$ (d.h. $\Gamma \models \bot$ bzw. Γ ist unerfüllbar). Dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, so daß höchstens die Atomformeln p_1, p_2, ..., p_n in Γ verwendet werden (n existiert, da Γ endlich ist).

Wir zeigen Lemma per Induktion über n

I.A. gilt $n = 0$, so $\Gamma \subseteq \{\Box\}$. Da Γ unerfüllbar ist, folgt $\{\Box\} = \Gamma$ und damit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$.

I.S. sei jetzt $n \geq 1$. Dann sind

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \left\{\Phi \setminus \{p_n\} \;\middle|\; \Phi \in \Gamma, \neg p_n \notin \Phi\right\} \text{ und} \\
\Gamma_1 &= \left\{\Phi \setminus \{\neg p_n\} \;\middle|\; \Phi \in \Gamma, p_n \notin \Phi\right\}
\end{aligned}$$

Klauselmengen, die höchstens die Atomformeln $p_1, \ldots, p_{n-1}$ verwenden.

Behauptung 1 Γ_0 ist unerfüllbar.

Begründung: Angenommen, $\mathcal{B}$ ist Belegung, die Γ_0 erfüllt, also $\mathcal{B}(\Phi \setminus \{p_n\}) = 1$ f.a. $\Phi \in \Gamma$ mit $\neg p_n \notin \Phi$.

o.B.d.A. $\mathcal{B}(p_n) = 0$ (da p_n in keiner Klausel aus Γ_0 vorkommt).

Sei $\Phi \in \Gamma$. Wir unterscheiden die Fälle $\neg p_n \in \Phi$ und $\neg p_n \notin \Phi$:

- $\neg p_n \in \Phi$: dann gilt $\mathcal{B}(\Phi) = 1$ wegen $\mathcal{B}(\neg p_n) = 1$
- $\neg p_n \notin \Phi$: $\mathcal{B}(\Phi) \geq \mathcal{B}(\Phi \setminus \{p_n\}) = 1$ wegen $\Phi \setminus \{p_n\} \in \Gamma_0$

Also ist Γ erfüllbar, im Widerspruch zur Annahme. *q.e.d.*

Nach Induktionsannahme gilt also

$$\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \square \text{ und (analog) } \Gamma_1 \vdash_{\text{Res}} \square$$

Behauptung 2 Für alle Klausel Ψ mit $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \Psi$ gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ oder $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi \cup \{p_n\}$.

Begründung: per Induktion über die Resolutionsableitung $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \Psi$.

I.A. $\Psi \in \Gamma_0$. Nach Definition von Γ_0 gilt $\Psi \in \Gamma$ oder $\Psi \cup \{p_n\} \in \Gamma$, also $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ oder $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi \cup \{p_n\}$.

I.S. Es gibt Resolutionsableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ_0, so daß Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 ist.

$\xRightarrow{I.V.}$ es gibt Klauseln Φ_i' mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_i'$ und $\Phi_i \subseteq \Phi_i' \subseteq \Phi_i \cup \{p_n\}$

Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2
$\Longrightarrow$ es gibt $\lambda \in \Phi_1$ mit $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ und $\Psi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}$.

insbes. $\lambda \in \Phi_1 \subseteq \Phi_1'$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2 \subseteq \Phi_2'$
$\Longrightarrow \Psi' := \Phi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\}$ ist Resolvente von Φ_1' und Φ_2'.

$\Longrightarrow \Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi'$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \\
&\subseteq \Phi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \qquad (= \Psi') \\
&\subseteq (\Phi_1 \cup \{p_n\}) \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \{p_n\}) \setminus \{\overline{\lambda}\} \\
&\subseteq (\Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}) \cup \{p_n\} \\
&= \Psi \cup \{p_n\},
\end{aligned}$$

d.h. $\Psi' = \Psi$ oder $\Psi' = \Psi \cup \{p_n\}$ *q.e.d.*

Wegen $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \Box$ haben wir also

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box \text{ oder } \Gamma \vdash_{\text{Res}} \{p_n\}$$

und analog

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box \text{ oder } \Gamma \vdash_{\text{Res}} \{\neg p_n\}$$

Da $\Box$ Resolvente von $\{p_n\}$ und $\{\neg p_n\}$ ist, gilt also in jedem Fall $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$, womit der induktive Beweis abgeschlossen ist. $\Box$

Satz (Korrektheit und Vollständigkeit der Resolutions-Refutation)

Sei Γ eine u.U. unendliche Klauselmenge Γ. Dann sind äquivalent:

- Γ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \bot$
- $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$

Beweis:

„$\Uparrow$“ Lemma auf Folie 6.7

„$\Downarrow$“ Sei Γ unerfüllbar

$\Longrightarrow$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich und unerfüllbar (Endlichkeitssatz)

$\Longrightarrow$ $\Gamma' \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$ nach Lemma auf Folie 6.9

$\Longrightarrow$ $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$ $\Box$

Wir haben also einen Test, der für eine Klauselmenge Γ feststellt, ob $\Gamma \models \perp$.
Sei nun Δ Klauselmenge und Φ mit $\Phi \setminus \{\perp\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ Klausel. Um $\Delta \models \Phi$ festzustellen, geht man wie folgt vor:

$$
\begin{aligned}
\Delta \models \Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta \models \bigvee\nolimits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta \cup \underbrace{\left\{ \neg \bigvee\nolimits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right\}}_{\text{keine Klausel}} \models \perp \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta \cup \left\{ \bigwedge\nolimits_{1 \leq i \leq n} \overline{\lambda}_i \right\} \models \perp \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta \cup \left\{ \overline{\lambda}_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \models \perp \\
&\Longleftrightarrow \quad \Delta \cup \left\{ \overline{\lambda}_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \vdash_{\text{Res}} \Box
\end{aligned}
$$

Folgerungstest für beliebige Formeln

Idee: Um zu testen, ob $\Gamma \models \bot$ gilt (vgl. Folie 6.2), wandeln wir Γ in Klauselmenge Γ' um, so daß $\Gamma \models \bot \iff \Gamma' \models \bot \iff \Gamma' \vdash_{\mathsf{Res}} \Box$.

Definition

Zwei Formeln α und β heißen äquivalent ($\alpha \equiv \beta$), wenn $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Für alle Formeln α und β ergibt sich

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \models \beta \text{ und } \{\beta\} \models \alpha$$

und damit nach dem Korrektheits- und Vollständigkeitssatz

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \vdash \beta \text{ und } \{\beta\} \vdash \alpha\,.$$

Satz

Für alle Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 gelten die folgenden Äquivalenzen:

1) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$
2) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$
3) $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$
4) $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$
5) $\varphi_1 \vee \varphi_1 \equiv \varphi_1$
6) $(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2$
7) $\neg\neg\varphi_1 \equiv \varphi_1$
8) $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1 \equiv \bot$
9) $\varphi_1 \vee \neg\varphi_1 \equiv \neg\bot$
10) $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$

Beweis: Wir zeigen nur die Äquivalenzen (3) und (4):
Sei $\mathcal{B}$ beliebige Belegung, die zu $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ paßt.

Dazu betrachten wir die Wertetabelle:

$\mathcal{B}(\varphi_1)$	$\mathcal{B}(\varphi_2)$	$\mathcal{B}(\varphi_3)$	$\mathcal{B}(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	$\mathcal{B}((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Äquivalenz (4) gilt aufgrund der Deduktionen auf Folie 2.25. $\square$

Aus dieser Liste von Äquivalenzen können weitere hergeleitet werden:

Beispiel

Für alle Formeln α und β gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Beweis:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \overset{(4)}{\equiv} \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$\square$

Bemerkung

- Korrektheit (einfach): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen aus dieser Liste hergeleitete Äquivalenzen sind korrekt.
- Vollständigkeit (schwierig): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können alle korrekten Äquivalenzen hergeleitet werden.

Mit Hilfe der Äquivalenzen von Folie 6.16 kann zu jeder Formel α eine äquivalente Formel in KNF berechnet werden:

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& (AK \vee BK) \wedge (AK \to BK) \wedge (BK \wedge RL \to \neg AK) \wedge RL \wedge \neg\neg AK \\
\equiv\; & (AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge (\neg(BK \wedge RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK \\
\equiv\; & (AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge ((\neg BK \vee \neg RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK
\end{aligned}
$$

und Formeln in KNF können als Klauselmengen aufgefaßt werden:

$(AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge ((\neg BK \vee \neg RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK$

entspricht der Klauselmenge

$\big\{\{AK, BK\}, \{\neg AK \vee BK\}, \{\neg BK \vee \neg RL \vee \neg AK\}, \{RL\}, \{AK\}\big\}$

Damit können wir tatsächlich eine beliebige Formelmenge Γ in eine Klauselmenge Γ' umwandeln:

- berechne für jede Formel $\gamma \in \Gamma$ die KNF
- betrachte diese KNF als Klauselmenge und bilde die Vereinigung Γ' all dieser Klauselmengen.

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Wir wollen

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

zeigen.

Dies ist äquivalent zu Unerfüllbarkeit der Formelmenge

$$\Gamma = \{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Eine hierzu äquivalente Klauselmenge:

$$\Gamma' = \{\{AK, BK\}, \{\neg AK \vee BK\}, \{\neg BK \vee \neg RL \vee \neg AK\}, \{RL\}, \{AK\}\}$$

gefunden von logictools.org mit `Build a clause normal form` bei Eingabe von

```
(AK V BK) & (-AK V BK) & (-BK V -RL V -AK) & RL & -(-AK)
```

Es ergibt sich die folgende Resolutions-Refutation:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg AK, BK\} \quad \{AK\}}{\{BK\}} \qquad \{\neg BK, \neg RL, \neg AK\}}{\{\neg RL, \neg AK\}} \qquad \{AK\}}{\{\neg RL\}} \qquad \{RL\}}{\square}$$

gefunden von logictools.org mit `Solve using Resolution: better showing html trace` bei Eingabe der berechneten Formel in KNF

Daher ist Γ' (und somit Γ) unerfüllbar. Also haben wir erneut nachgewiesen, daß unter den genannten Bedingungen das Teil A heil ist.

Probleme:

1. <u>Vollständigkeit:</u> $\Gamma \models \Psi \implies \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Psi$ gilt nur für $\Psi = \Box$.
man kann zeigen (siehe Zusatzmaterial auf Folien 6.26 ff.): Sei Ψ Klausel, so daß für keine Atomformel p gilt $p, \neg p \in \Psi$. Dann gilt

$$\Gamma \models \Psi \iff \exists \Psi' \subseteq \Psi : \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Psi' .$$

2. <u>Laufzeit 1:</u> Es gibt unerfüllbare endliche Klauselmengen, so daß jede Resolutions-Refutation exponentielle Größe hat; insbes. ist exponentielle Zeit nötig, um sie zu finden (Haken 1985).

3. Laufzeit 2:

$$(p_1^1 \wedge p_2^1) \vee (p_1^2 \wedge p_2^2) \equiv (p_1^1 \vee p_1^2) \wedge (p_1^1 \vee p_2^2) \wedge (p_2^1 \vee p_1^2) \wedge (p_2^1 \vee p_2^2)$$

allgemein:

$$\gamma = \bigvee_{1 \le i \le n} (p_1^i \wedge p_2^i) \equiv \bigwedge_{f:\,\{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}} \bigvee_{1 \le i \le n} p_{f(i)}^i$$

Diese Formel in KNF ist exponentiell groß. Man kann zeigen, daß jede zu γ äquivalente Formel in KNF wenigstens 2^n viele Klauseln enthält. Die Berechnung der Klauselmenge Γ' aus $\Gamma = \{\gamma\}$ benötigt also exponentielle Zeit.

wir werden zeigen (Folie 8.2 ff.): man kann Formel γ' in KNF in polynomieller Zeit berechnen, die genau dann erfüllbar ist, wenn γ erfüllbar ist (was für unsere Zwecke ausreicht).

Zusammenfassung 6. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- weitere Methode, die Gültigkeit einer Folgerung zu entscheiden: die Resolution

kommende Vorlesung

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

Zusatzmaterial

Eine Klausel Ψ heißt tautologisch, wenn es eine Atomformel p gibt mit $p, \neg p \in \Psi$ (dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{B}(\Psi) = 1$ für alle Belegungen Ψ gilt).

Lemma

Seien Γ eine Klauselmenge und $\Psi = \{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\}$ eine nicht-tautologische Klausel. Sei weiter $\Gamma^+ = \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \,\middle|\, 1 \leq i \leq n\right\}$ und Φ eine Klausel mit $\Gamma^+ \models \Phi$. Dann

- gilt $\Phi \in \Gamma^+$ oder
- es existiert eine Klausel $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über die Größe der Resolutions-Ableitung $\Gamma^+ \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi$.

I.A. $\Phi \in \Gamma^+$. Dann gilt Behauptung des Lemmas trivialerweise.

I.S. Sei Φ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 mit $\Gamma^+ \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma^+ \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2$.

Dann existiert ein Literal λ mit $\lambda \in \Phi_1$, $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ und
$\Phi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}$.

Für Φ_1 bestehen drei Möglichkeiten (analog für Φ_2):

1. $\Phi_1 \in \Gamma$
2. es gibt $1 \leq i \leq n$ mit $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$
3. $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Es ergeben sich 9 mögliche Kombinationen, die wir einzeln behandeln müssen.

Fall 1: $\Phi_1 \in \Gamma$.
Fall 1.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Setze $\Psi' = \emptyset$. Dann gelten

- $\{\Phi_1, \Phi_2\} \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi = \Phi \cup \Psi'$ und
- $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_2$

woraus sich $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi \cup \Psi'$ ergibt.

Fall 1.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Setze $\Psi' = \{\overline{\lambda}_j\} \subseteq \Psi$.

Wegen $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\overline{\lambda} = \lambda_j$ und daher $\overline{\lambda}_j = \lambda \in \Phi_1$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \emptyset \end{aligned}$$

und daher

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_1 = \Phi \cup \{\lambda\} = \Phi \cup \{\overline{\lambda}_j\} = \Phi \cup \Psi'\,.$$

Fall 1.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \subseteq \Psi_2' \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \left(\Phi_2 \cup \Psi_2'\right) \setminus \{\overline{\lambda}\}, \end{aligned}$$

d.h. $\Phi \cup \Psi'$ ist Resolvente von Φ_1 und $\Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Aus $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$ ergibt sich also $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Fall 2: $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Fall 2.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.2

Fall 2.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aus $\lambda \in \Phi_1$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\lambda_i = \overline{\lambda}_j$.

Wegen $\lambda_i, \lambda_j \in \Psi$ ist Ψ also tautologisch, im Widerspruch zur Annahme.

Damit kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_2' \cup \{\overline{\lambda}\} = \psi_2' \cup \{\overline{\lambda}_i\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_2' \cup \{\overline{\lambda}\} \\ &= \emptyset \cup \Phi_2 \cup \Psi_2' \text{ denn } \overline{\lambda} \in \Phi_2 \end{aligned}$$

und damit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2' = \Phi \cup \Psi'$.

Fall 3: $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsanname existiert $\Psi_1' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_1 \cup \Psi_1'$.

Fall 3.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.3

Fall 3.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dies ist symmetrisch zum Fall 2.2

Fall 3.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach der Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= (\Phi_1 \cup \Psi_1') \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \Psi_2') \setminus \{\overline{\lambda}\} \end{aligned}$$

Also ist $\Phi \cup \Psi'$ Resolvente von $\Phi_1 \cup \Psi_1'$ und $\Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Aus $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_1 \cup \Psi_1'$ und $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$ folgt also $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi \cup \Psi'$. $\square$

Satz

Sei Γ Klauselmenge und Ψ nicht-tautologische Klausel mit $\Gamma \models \Psi$. Dann existiert $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Psi'$.

Beweis: Seien $\Psi = \left\{\overline{\lambda_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$ und $\Gamma^+ = \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$.

Wegen $\Gamma \models \Psi$ gilt $\Gamma \models \bigvee_{1\leq i\leq n} \overline{\lambda}_i$.
$\Longrightarrow \Gamma \cup \{\neg \bigvee_{1\leq i\leq n} \overline{\lambda}_i\}$ unerfüllbar
$\Longrightarrow \Gamma \cup \{\bigwedge_{1\leq i\leq n} \lambda_i\}$ unerfüllbar
$\Longrightarrow \Gamma^+ := \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\}$ unerfüllbar

Es gilt also $\Gamma^+ \models \Box$. Aus der Refutations-Vollständigkeit der Resolution (Folie 6.9) ergibt sich $\Gamma^+ \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$.
Mit $\Phi = \Box$ ergibt das vorherige Lemma

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi \cup \Psi' = \Psi'$$

für ein $\Psi' \subseteq \Psi$. $\Box$