# Logik und Logikprogrammierung
# 7. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

# Eingabe-Resolution

Resolutions-Ableitungen können sehr komplizierte Bäume sein, die Suche nach ihnen ist dementsprechend schwer.

**Ziel:** Beschränkung auf „einfache Ableitungen“

### Definition

Eine Eingabe-Ableitung ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Knoten Blatt oder Vater eines Blattes ist (für ein Beispiel siehe Folie 6.22).

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Eingabe}} \Psi$ wenn es eine Eingabe-Ableitung mit Hypothesen aus $\Gamma$ und Konklusion $\Psi$ gibt.

## Beispiel

Sei $\Gamma = \{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,\neg q\}\}$.

- $\Gamma$ ist unerfüllbar, denn es gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$:

$$\dfrac{\dfrac{\{p,q\} \quad \{\neg p,q\}}{q} \qquad \dfrac{\{p,\neg q\} \quad \{\neg p,\neg q\}}{\neg q}}{\Box}$$

- es gilt jedoch nicht $\Gamma \vdash_{\text{Eingabe}} \Box$: es gibt keine Klauseln $\Phi \in \Gamma$ und $\Psi$, so daß $\Box$ Resolvente von $\Phi$ und $\Psi$ ist.

Der Vollständigkeitssatz von Folie 6.13 gilt also nicht für Eingabe-Ableitungen.

# Hornformeln (Alfred Horn, 1918–2001)

## Beobachtung

- In vielen Situationen kann „Wissen“ als Regelmenge formalisiert werden. Typische Regeln sind
  - „wenn dies und dies und dies gilt, so gilt jenes“
  - bzw. „dies gilt“.
- Gefragt ist dann oft, ob „dies“ gilt.

Für solche Situationen werden wir zeigen, daß die Horn-Resolution (eine Verschärfung der Eingabe-Resolution) ausreicht.

Außerdem: Grundlage der logischen Programmierung.

Aus Alfred Horns Nachruf:
„... Horn clauses ... became important in the 1970s in computational logic... Professor Horn was amused to hear of this application for his research but he never owned a personal computer himself ... He believed all worthwhile information could most easily be obtained at the public library.“

## Definition

Eine Hornklausel ist eine Formel $\alpha$ der Gestalt

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot \to r\,,$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ atomare Formeln $\neq \bot$ und $r$ atomare Formel (also u.U. $r = \bot$) sind.

Sie heißt

- positiv oder Regel, wenn $r \neq \bot$.
- negativ, wenn $r = \bot$.

## Bemerkung

Es gilt

$$\begin{aligned} p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot \to r &\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot) \vee r \\ &\equiv \neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee \bot \vee r \\ &\mathrel{\hat{=}} \{\neg p_1, \cdots, \neg p_n, r\} \end{aligned}$$

Daher erhalten wir: Eine Klausel $\Phi$ (d.h. endliche Menge von Literalen) ist

- Hornklausel, wenn höchstens ein Literal der Form $p$ vorkommt,
- positive Hornklausel, wenn genau ein Literal der Form $p$ vorkommt und
- negative Hornklausel, wenn kein Literal der Form $p$ vorkommt.

## Beobachtung

Sei $\Psi$ eine Resolvente der Hornklauseln $\Phi_1$ und $\Phi_2$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $\Psi$ ist Hornklausel.
2. $\Phi_1$ oder $\Phi_2$ ist (oder beide sind) positiv.
3. Sind $\Phi_1$ und $\Phi_2$ positiv, so ist auch $\Psi$ positiv.
4. Ist $\Phi_1$ positiv und $\Phi_2$ negativ (oder umgekehrt), so ist $\Psi$ negativ.
5. Die leere Klausel $\Box$ ist eine negative Hornklausel.

**Begründung:**

Es gibt atomare Formel $p$ mit (o.B.d.A.) $p \in \Phi_1$, $\neg p \in \Phi_2$ und $\Psi = \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}$.

1. $\leq 1$ positives Literal in $\Phi_1 \implies$ kein positives Literal in $\Phi_1 \setminus \{p\}$
   $\leq 1$ positives Literal in $\Phi_2$
   $\implies \Psi$ enthält $\leq 1$ positives Literal, ist also Hornklausel
2. klar wegen $p \in \Phi_1$
3. $\Phi_2$ positiv
   $\implies q \in \Phi_2$ für eine atomare Formel $q$
   $\implies q \in \Psi$, d.h. $\Psi$ ist positiv.
4. $\Phi_2$ negativ
   $\implies$ alle Literale in $\Phi_2$ sind negativ
   Da $p$ einziges positives Literal in $\Phi_1$ ist, enthält $\Psi$ also keine positiven Literale, ist also negative Hornklausel.
5. Klausel $\square$ enthält kein positives Literal, ist also negative Hornklausel. $\square$

## Definition

Sei $\Gamma$ Menge von Hornklauseln. Eine Horn-Ableitung ist eine Resolutions-Ableitung, in der keine positiven Resolventen auftreten.

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Phi$, wenn es eine Horn-Ableitung gibt mit Hypothesen in $\Gamma$ und Konklusion $\Phi$.

## Beobachtung

Da es keine Resolvente von zwei negativen Hornklauseln gibt, ist die allgemeine Form einer Horn-Ableitung also folgendermaßen, wobei die Hornklauseln $\Psi_i$ negativ und die Hornklauseln $\Phi_i$ positiv sind (mit $\Psi_0, \Phi_i \in \Gamma$ für alle $i$):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Psi_0 \quad \Phi_0}{\Psi_1 \qquad \Phi_1}}{\Psi_2 \qquad \Phi_2}}{\Psi_3 \qquad \Phi_3}}{\Psi_4} \\ \ddots$$

Daher ist jede Horn-Ableitung auch eine Eingabe-Ableitung.

## Plan

Für Klauselmengen $\Gamma$ gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Res}} \square\,.$$

Wir wollen zeigen: Ist $\Gamma$ Menge von Hornklauseln, so gilt sogar

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square\,.$$

Hierfür reicht es zu zeigen:

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square \iff \Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square\,.$$

Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist trivial, die komplizierte Implikation „$\Rightarrow$“ wird gezeigt, indem die Resolutions-Ableitung in eine Horn-Ableitung „umgebaut“ wird. Hierzu zunächst ein Beispiel.

# Beispiel

Betrachte die folgende Resolutions-Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \dfrac{\{p\} \quad \{q, \neg p\}}{\{q\}}}{\{\neg p, \neg r\}} \quad \{p, \neg q\}}{\{\neg r, \neg q\}} \quad \{q, \neg r\}}{\{\neg r\}} \quad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \quad \{s\}}{\Box}$$

- alle Hypothesen sind Hornklauseln (und daher sind alle vorkommenden Klauseln Hornklauseln)
- die Konklusion ist $\Box$
- es handelt sich um keine Horn-Ableitung, da die positive Hornklausel $\{q\}$ eine Resolvente ist.
- Mit der negativen Resolvente $\{\neg p, \neg r\}$ beginnt eine Horn-Ableitung.

„Umbau“ des ersten Teils der Resolutions-Ableitung:

- zunächst werden die zwei positiven Hornklauseln $\{p\}$ $\{q, \neg p\}$ zu $\{q\}$ „kombiniert“
- und dann wird deren „Kombination“ auf die negative Hornklausel $\{\neg q, \neg p, \neg r\}$ „angewandt“.
- Das Ergebnis ist $\{\neg p, \neg r\}$.

$$\frac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \dfrac{\{p\} \quad \{q, \neg p\}}{\{q\}}}{\{\neg p, \neg r\}}$$

Idee der „Hornifizierung“ dieses Teils der Resolutionsableitung:

- „kombiniere“ negative Hornklausel $\{\neg q, \neg p, \neg r\}$ nacheinander mit $\{q, \neg p\}$ und $\{p\}$.
- Das Ergebnis ist $\{\neg r\}$, ist also kleiner geworden.

$$\frac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \{q, \neg p\}}{\{\neg p, \neg r\}} \quad \{p\}}{\{\neg r\}}$$

Da das Ergebnis des 1. Teils durch den „Umbau“ verkleinert wurde, muß sich auch der 2. Teil ändern: Wir löschen all das, was „keinen Sinn mehr ergibt“:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg p, \neg r\} \quad \{p, \neg q\}}{\{\neg r, \neg q\}} \qquad \{q, \neg r\}}{\{\neg r\}} \qquad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\Box}
$$

Damit haben wir die folgende Horn-Ableitung aus dem neuen Ergebnis $\{\neg r\}$ (ohne neue positive Hypothesen) mit Konklusion $\Box$:

$$
\dfrac{\dfrac{\{\neg r\} \quad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\Box}
$$

Zusammengenommen ergibt sich die folgende Horn-Ableitung ohne neue Hypothesen mit Konklusion $\Box$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \{q, \neg p\}}{\{\neg p, \neg r\}} \qquad \{p\}}{\{\neg r\}} \qquad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\Box}$$

Das folgende Lemma verallgemeinert das „Löschen“ im zweiten Teil:

### Lemma

Seien $\Delta$ Menge positiver Hornklauseln und $\Psi^- \subseteq \Psi$ negative Hornklauseln. Dann gilt

$$\Delta \cup \{\Psi\} \vdash_{\text{Horn}} \Box \implies \Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

**Beweis:** induktiv über die Größe der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Delta \cup \{\Psi\}$.

- IA Die kleinstmögliche Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ hat die Hypothese $\Box$. Da $\Box$ negativ ist, folgt $\Psi = \Box$ und damit $\Psi^- = \Psi$, womit die Aussage $\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$ trivial wird.
- IS Betrachte den ersten Schritt in der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Delta \cup \{\Psi\}$: es gibt $\Phi \in \Delta$ und $p \in \Phi$ mit $\neg p \in \Psi$ und

$$\Delta \cup \left\{\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\}\right\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

Wir unterscheiden die Fälle $\neg p \in \Psi^-$ und $\neg p \notin \Psi^-$:
<u>1. Fall:</u> $\neg p \notin \Psi^-$. Dann gilt

$$\Psi^- \subseteq \Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\},$$

nach IV folgt

$$\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box .$$

<u>2. Fall:</u> $\neg p \in \Psi^-$. Dann ist

$$\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi^- \setminus \{\neg p\} \subseteq \Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\}$$

Resolvente von $\Phi$ und $\Psi^-$. Nach der IV folgt

$$\Delta \cup \left\{\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi^- \setminus \{\neg p\}\right\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

und damit

$$\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box .$$

$\Box$

### Lemma

Für jede Menge $\Gamma$ von Hornklauseln gilt

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box \implies \Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box .$$

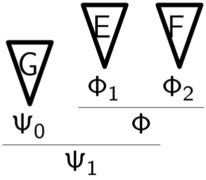
**Beweis:**
Für eine Resolutionsableitung $D$ sei $n_D$ die Anzahl positiver Resolventen in $D$, so daß $D$ genau dann Horn-Ableitung ist, wenn $n_D = 0$.

Sei $D$ eine Resolutions-Ableitung von $\Box$ mit Hypothesen aus $\Gamma$ mit dem geringstmöglichen Wert $n_D$.

Gilt $n_D = 0$, so haben wir $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$.

Angenommen $n_D > 0$. Dann existiert eine Resolutions-Ableitung $D'$ der nebenstehenden Gestalt mit

- $n_D = n_{D'}$,
- $\Phi_1$, $\Phi_2$ und $\Phi$ sind positive Hornklauseln,
- $\Psi_0$ und $\Psi_1$ sind negative Hornklauseln und
- $\Delta \cup \{\Psi_1\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$, wobei $\Delta \subseteq \Gamma$ die Menge der positiven Hornklauseln aus $\Gamma$ ist.



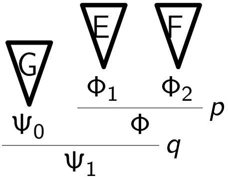

Wir werden die Resolutions-Ableitung $D'$ vereinfachen (was das „Umbauen" des 1. Teils der Resolutions-Ableitung verallgemeinert)

- $\Phi$ Resolvente von $\Phi_1$ und $\Phi_2$
  $\implies$ es gibt $p \in \Phi_1$ mit $\neg p \in \Phi_2$ und $\Phi = \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}$.
- $\Psi_1$ Resolvente von $\Psi_0$ und $\Phi$
  $\implies$ es gibt $q \in \Phi$ mit $\neg q \in \Psi_0$ und $\Psi_1 = \Phi \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}$.

Wir haben

- $q \in \Phi_2$ und $\neg q \in \Psi_0$
- $p \in \Phi_1$ und $\neg p \in \Phi_2 \setminus \{q\}$ (da $\neg p \in \Phi_2$)

Erinnerung: $D'$ ist die folgende Resolutions-Ableitung:



Daher ist das folgende eine Resolutions-Ableitung $D''$ (die weniger positive Resolventen enthält als $D'$):

$$\frac{\overset{E}{\Phi_1} \qquad \dfrac{\overset{F}{\Phi_2} \qquad \overset{G}{\Psi_0}}{\Phi_2 \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}}\, q}{\underbrace{\Phi_1 \setminus \{p\} \cup \big(\Phi_2 \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}\big) \setminus \{\neg p\}}_{=:\Psi_1^-}}\, p$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\Psi_1^- &= \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{q, \neg p\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q, \neg p\} \\
&= \Phi_1 \setminus \{p, q\} \cup \Phi_2 \setminus \{q, \neg p\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q, \neg p\} \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{da } \Phi_1 \text{ Hornklausel und } p \in \Phi_1) \\
&\subseteq \big(\Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}\big) \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\} \\
&= \Phi \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\} = \Psi_1
\end{aligned}$$

Wegen $\Delta \cup \{\Psi_1\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$ und $\Psi_1^- \subseteq \Psi_1$ gilt $\Delta \cup \{\Psi_1^-\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$ nach dem Lemma auf Folie 7.15.

Wir haben also eine Resolutionsableitung $D''$ für $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Psi_1^-$ gefunden mit $n_{D''} < n_{D'} = n_D$ und es gilt $\Delta \cup \{\Psi_1^-\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$.

Das Zusammensetzen dieser zwei Resolutions-Ableitungen ergibt eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in $\Gamma$, Konklusion $\Box$ und $< n_D$ vielen positiven Resolventen, im Widerspruch zur Wahl von $D$. $\square$

## Satz

Sei $\Gamma$ Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent

- $\Gamma$ ist unerfüllbar.
- $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$.

**Beweis:**

Angenommen, $\Gamma$ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \Box$. Dann gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$. Aus dem eben bewiesenen Lemma erhalten wir $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$

Gilt umgekehrt $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$, so folgt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$. Daher ist $\Gamma$ unerfüllbar. $\Box$

# Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Ziel ist es, die folgende Folgerung zu zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

Lemma auf Folie 3.9: man muß Unerfüllbarkeit der folgenden Menge zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Dies ist keine Menge von Hornklauseln ☹!

**Idee**: ersetze $BK$ durch $\neg BH$ in allen Formeln.

Ergebnis:

- Aus $AK \vee BK$ wird $\neg BH \vee AK \hat{=} \{\neg BH, AK\}$.
- Aus $AK \rightarrow BK$ wird $AK \rightarrow \neg BH \equiv \neg AK \vee \neg BH \hat{=} \{\neg AK, \neg BH\}$.
- Aus $BK \wedge RL \rightarrow \neg AK$ wird
  $\neg BH \wedge RL \rightarrow \neg AK \equiv BH \vee \neg RL \vee \neg AK \hat{=} \{\neg RL, \neg AK, BH\}$
- $RL \hat{=} \{RL\}$
- $\neg\neg AK \equiv AK \hat{=} \{AK\}$

Wir müssen also zeigen, daß die folgende Menge von Hornklauseln unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg BH, AK\}, \{\neg AK, \neg BH\}, \{\neg RL, \neg AK, BH\}, \{RL\}, \{AK\}\}$$

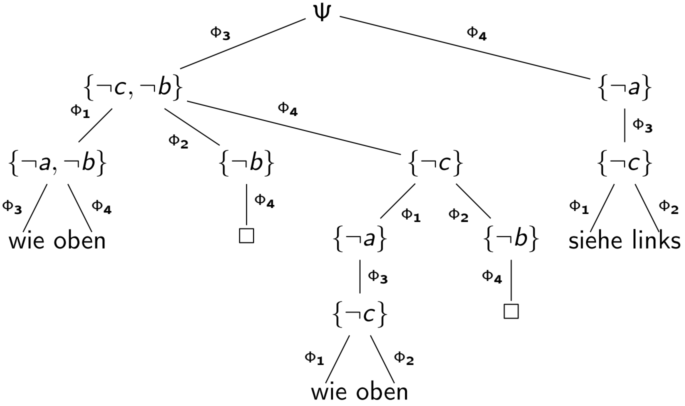
Dazu geben wir eine Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ an.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{\neg AK, \neg BH\} \quad \{\neg RL, \neg AK, BH\}}{\{\neg AK, \neg RL\}} \qquad \{AK\}}{\{\neg RL\}} \qquad \{RL\}}{\square}$$

# Beispiel

$$\Gamma = \{\underbrace{\{\neg a, \neg b\}}_{\Psi}, \underbrace{\{\neg a, c\}}_{\Phi_1}, \underbrace{\{\neg b, c\}}_{\Phi_2}, \underbrace{\{\neg c, a\}}_{\Phi_3}, \underbrace{\{b\}}_{\Phi_4}\}$$

alle Horn-Resolutionen aus $\Gamma$ kann man durch einen Baum beschreiben:



Die Suche nach einer Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen:

- Breitensuche:
  - findet Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
  - hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe $n$ kann es Niveaus der Größe $2^n$ geben)
- Tiefensuche:
  - geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe $n$ hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
  - findet existierende Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ nicht immer (siehe Beispiel)

**SLD-Resolution:** spezielle Form der Tiefensuche:

- Hornklauseln werden nicht als Mengen $\{\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_m, q\}$, sondern als Tupel $(q, \neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_m)$ bzw. $(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_m)$ (für $q = \bot$) aufgefaßt
- endliche Menge von Hornklauseln $\Gamma$ ebenfalls als Tupel aufgefaßt $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$
- es wird immer Resolvente an erster möglicher Stelle der augenblicklichen negativen Hornklausel mit erster möglicher Eingabeklausel gebildet.

Dies führt zur logischen Programmiersprache PROLOG.

# Zusammenfassung 7. Vorlesung

## in dieser Vorlesung neu

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

## kommende Vorlesung

- Tseitin-Konstruktion: schnelle Berechnung einer Formel $\gamma'$ in KNF aus einer Formel $\gamma$, so daß $\gamma'$ erfüllbar gdw. $\gamma$ erfüllbar (verwendet für Anwendung der Resolution zur Entscheidung „Gilt $\Gamma \models \varphi$?“ bzw. „Ist $\Gamma$ unerfüllbar?“)
- FRAGESTUNDE