Logik und Logikprogrammierung
11. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

Definition (vgl. Folie 2.23)

Für eine Menge Γ von Σ-Formeln und eine Σ-Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ. Wir sagen „φ ist eine syntaktische Folgerung von Γ“.

Eine Formel φ ist ein Theorem, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

Bemerkung (vgl. Folie 2.24)

$\Gamma \vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über den Fakt, daß φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.

Ebenso sagt „φ ist Theorem“ nur, daß φ abgeleitet werden kann, über „Wahrheit“ sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Der Satz auf Folie 3.19 kann jetzt wie folgt erweitert werden:

Korrektheitssatz

Für eine Menge von Σ-Formeln Γ und eine Σ-Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi \,.$$

Beweisidee: Analog zum Beweis des Korrektheitssatzes der Aussagenlogik (Folie 3.13) per Induktion über den Aufbau der Deduktion. □

Beispiel

Seien φ Formel und x Variable. Dann gelten

$$\{\neg\exists x\,\varphi\} \models \forall x\,\neg\varphi \text{ und } \{\forall x\,\neg\varphi\} \models \neg\exists x\,\varphi\,.$$

Beweis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\,\varphi \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\exists x\,\varphi}\,(\exists\text{-I})}{\bot}\,(\neg\text{-E})}{\neg\varphi}\,(\neg\text{-I})^2}{\forall x\,\neg\varphi}\,(\forall\text{-I})$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\neg\exists x\,\varphi\} \models \forall x\,\neg\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\varphi]^2 \qquad \dfrac{[\varphi]^1 \qquad \dfrac{\forall x\,\neg\varphi}{\neg\varphi}\,(\forall\text{-E})}{\bot}\,(\neg\text{-E})}{\bot}\,(\exists\text{-E})^1}{\neg\exists x\,\varphi}\,(\neg\text{-I})^2$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\forall x\,\neg\varphi\} \models \neg\exists x\,\varphi$.

$\square$

Beispiel

Seien φ Formel und x Variable. Dann gelten $\{\neg\forall x\,\varphi\} \models \exists x\,\neg\varphi$ und $\{\exists x\,\neg\varphi\} \models \neg\forall x\,\varphi$.

Beweis:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\forall x\,\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x\,\neg\varphi]^1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^2}{\exists x\,\neg\varphi}\,(\exists\text{-I})}{\bot}\,(\neg)\text{-E}}{\varphi}\,(\text{raa})^2}{\forall x\,\varphi}\,(\forall\text{-I})}{\bot}\,(\neg\text{-E})}{\exists x\,\neg\varphi}\,(\text{raa})^1$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\neg\forall x\,\varphi\} \models \exists x\,\neg\varphi$.

$$\dfrac{\exists x\,\neg\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^1 \qquad \dfrac{[\forall x\,\varphi]^2}{\varphi}\,(\forall\text{-E})}{\bot}\,(\neg\text{-E})}{\neg\forall x\,\varphi}\,(\neg\text{-I})^2}{\neg\forall x\,\varphi}\,(\exists\text{-E})^1$$

Nach dem Korrektheitssatz folgt $\{\exists x\,\neg\varphi\} \models \neg\forall x\,\varphi$.

$\square$

Vollständigkeit (vgl. Folie 3.20ff.)

Nach dem Korrektheitssatz können wir durch das natürliche Schließen keine unkorrekten Aussagen beweisen.

Aber können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?

Existiert eine Menge Γ von Σ-Formeln und eine Σ-Formel φ mit $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \not\vdash \varphi$?

Frage

Gilt

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$$

bzw.

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig } \implies \varphi \text{ ist Theorem?}$$

Plan

z.z. ist $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

dies ist äquivalent zu $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi$.

hierzu geht man folgendermaßen vor:

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models \varphi \\
\Updownarrow \text{(vgl. Folie 3.22)} & & \text{(vgl. Folie 3.9)} \Updownarrow \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(vgl. Folie 3.25)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists\, \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & & \Delta \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 11.8)} & & \text{(klar)} \Uparrow \\
\exists \Delta^+ \supseteq \Delta \text{ maximal konsistent mit Konkretisierungen} & \underset{\text{(Folie 11.9)}}{\Longrightarrow} & \Delta^+ \text{ erfüllbar}
\end{array}
$$

Definition

Eine Menge Δ von Formeln hat Konkretisierungen, wenn für alle $\exists x\, \varphi \in \Delta$ ein variablenloser Term t existiert mit $\varphi[x := t] \in \Delta$.

Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Σ-Formeln. Dann existiert eine Signatur $\Sigma^+ \supseteq \Sigma$ und eine maximal konsistente Menge Δ^+ von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen, so daß $\Delta \subseteq \Delta^+$.

Beweisidee: Man führt für jede Formel $\exists x\, \varphi$ aus Δ eine neue Konstante $c \in \mathrm{Fun}^+$ ein und nimmt die Formel $\varphi[x := c]$ in Δ^+ auf. $\square$

Satz

Sei Δ^+ maximal konsistente Menge von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen. Dann ist Δ^+ erfüllbar.

Beweisidee: Sei T die Menge der variablenlosen Σ^+-Terme. Auf T definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$s \sim t \iff \Delta^+ \vdash (s = t) \iff (s = t) \in \Delta^+$$

(vgl. Folie 3.27)
Sei $\mathcal{A}$ die folgende Σ^+-Struktur:

- $U_\mathcal{A} := T/\sim$ ist die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen
- $R^\mathcal{A} = \left\{ ([t_1], \ldots, [t_k]) \;\middle|\; t_1, \ldots, t_k \in T, R(t_1, \ldots, t_k) \in \Delta^+ \right\}$
  für alle Relationssymbole R aus Σ^+
- $f^\mathcal{A}([t_1], \ldots, [t_k]) = \left[f(t_1, \ldots, t_k) \right]$
  für alle $t_1, \ldots, t_k \in T$ und alle Funktionssymbole f aus Σ^+
  (Bemerkung: dies ist wohldefiniert)

Dann gilt tatsächlich $\mathcal{A} \models \Delta^+$. □

Satz (Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik)

Sei Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi\,.$$

Insbesondere ist jede allgemeingültige Formel ein Theorem.

Dies ist (im wesentlichen) der berühmte Gödelsche Vollständigkeitssatz von 1930 (Kurt Gödel, 1906-1978), der angegebene Beweis wurde 1949 von Leon Henkin (1921-2006) veröffentlicht.

Vollständigkeit und Korrektheit für die Prädikatenlogik

Satz (vgl. Folie 4.8)

Seien Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi\,.$$

Insbesondere ist eine Σ-Formel genau dann allgemeingültig, wenn sie ein Theorem ist.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Korrektheitssatz auf Folie 11.3 und Vollständigkeitssatz auf Folie 11.10. $\square$

Folgerung 1: „Semi-Entscheidbarkeit“

vgl. Modul „Berechenbarkeit und Komplexität“

Es gibt ein Verfahren, mit dessen Hilfe man für endliche Menge Γ von aussagenlogischen Formeln und einzelne aussagenlogische Formel φ feststellen kann, ob $\Gamma \models \varphi$ gilt:

$\Gamma \models \varphi \iff \psi := \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma \wedge \neg\varphi$ unerfüllbar

$\iff \mathcal{B}(\psi) = 0$ f.a. Belegungen $\mathcal{B}$ der atomaren Formeln aus ψ

- berechne also die Wahrheitswertetabelle für ψ.

Gibt es ein solches Verfahren auch für die Prädikatenlogik?

analoge Idee: teste für alle Strukturen $\mathcal{A}$, ob $\mathcal{A} \models \psi$ gilt.
Probleme:

- es gibt unendlich viele Struturen $\mathcal{A}$
- da eine Struktur $\mathcal{A}$ unendlich sein kann, ist nicht einmal klar, wie man testen kann, ob $\mathcal{A} \models \psi$ gilt

Satz (vgl. Folie 4.9)

Es gibt ein Verfahren (ein Programm), das bei Eingabe einer endlichen Menge Γ von Σ-Formeln und einer Σ-Formel φ genau dann terminiert, wenn $\Gamma \models \varphi$ gilt.

Beweis:

$\Gamma \models \varphi$

$\iff \Gamma \vdash \varphi$

$\iff$ es gibt Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ

Das Verfahren kann also folgendermaßen vorgehen:

Teste für jede Zeichenkette w nacheinander, ob sie Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ ist. Wenn ja, so terminiere. Ansonsten gehe zur nächsten Zeichenkette über. $\square$

Folgerung

Es gibt Verfahren (ein Programm), das bei Eingabe einer Σ-Formel φ genau dann terminieren,

1. wenn φ allgemeingültig
2. bzw. wenn φ unerfüllbar ist.

Beweis:

1. φ allgemeingültig $\iff \emptyset \models \varphi$.
2. φ unerfüllbar $\iff \neg\varphi$ allgemeingültig $\square$

Bemerkung

Man kann zeigen:

- Es gibt kein Verfahren, daß für alle Aussagen ψ feststellt, ob sie allgemeingültig sind oder nicht (Alonzo Church 1936).
- Es gibt kein Verfahren, daß für alle Aussagen ψ feststellt, ob $(\mathbb{N}, +, \cdot) \models \psi$ gilt (Alan Turing und Alonzo Church 1936).

Folgerung 2: Kompaktheit (vgl. Folien 4.10)

Satz

Seien Γ eine u.U. unendliche Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel mit $\Gamma \models \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \models \varphi$.

Beweis: identisch zum Beweis des analogen Satzes der Aussagenlogik, vgl. Folie 4.10 $\square$

Folgerung (Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz)

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Σ-Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ erfüllbar } \iff \forall\, \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich: } \Gamma' \text{ erfüllbar}$$

Beweis: identisch zum Beweis des analogen Satzes der Aussagenlogik, vgl. Folie 4.11 $\square$

Beispiel

Sei Δ eine u.U. unendliche Menge von Σ-Formeln, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Struktur $\mathcal{A}_n$ mit $\mathcal{A}_n \models \Delta$ existiert, die $\geq n$ Elemente hat.

Dann existiert eine unendliche Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Delta$.

Beweis: für $n > 0$ setze

$$\begin{aligned}\varphi_{\geq n} &= \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \bigwedge\nolimits_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \text{ und} \\ \Gamma &= \Delta \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n > 0\}.\end{aligned}$$

Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma' \subseteq \Delta \cup \{\varphi_{\geq i} \mid 0 < i \leq n\}$.
$\Longrightarrow \mathcal{A}_n \models \Gamma'$, d.h. jede endliche Teilmenge von Γ ist erfüllbar.
$\xRightarrow{\text{Kompaktheitssatz}}$ es gibt Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Gamma$
Ist $\mathcal{A}$ endlich, so existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A} \models \neg\varphi_{\geq m}$, im Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \Gamma$ und $\varphi_{\geq m} \in \Gamma$. Also ist $\mathcal{A}$ unendlich. $\square$

Folgerung 3: Löwenheim-Skolem

Frage

Gibt es eine Menge Γ von Σ-Formeln, so daß für alle Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A} \cong (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)\,?$$

Satz von Löwenheim-Skolem

Sei Γ erfüllbare und höchstens abzählbar unendliche Menge von Σ-Formeln. Dann existiert ein höchstens abzählbar unendliches Modell von Γ.

Beweis:
Γ erfüllbar $\Longrightarrow \Gamma \not\models \bot$
Der Beweis des Vollständigkeitssatzes liefert dann ein Modell von Γ, *das höchstens abzählbar unendlich ist*. $\square$

Die Frage auf der vorherigen Folie muß also verneint werden:

angenommen, Γ wäre eine solche Menge

$\xrightarrow{\Sigma \text{ endlich}} |\Gamma| \leq \aleph_0$

$\Longrightarrow$ (Folie 11.17) Γ hat ein höchstens abzählbar unendliches Modell $\mathcal{A}$

$\xrightarrow{|\mathbb{R}|>\aleph_0} \mathcal{A} \ncong (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\square$

Zusammenfassung 11. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Korrektheit und Vollständigkeit des natürlichen Schließens, Konsequenzen daraus (vgl. Vorlesungen 3 und 4)

kommende zwei Vorlesungen

- Resolutionskalkül für die Prädikatenlogik (vgl. Vorlesungen 6 und 7), d.h. Unerfüllbarkeitstest für Mengen gleichungsloser Klauseln

kommende Vorlesung

- Grundresolution, d.h. Unerfüllbarkeitstest für Mengen variablen- und gleichungsloser Klauseln
- Unifikation (Vorbereitung allgemeine prädikatenlogische Resolution)