Logik und Logikprogrammierung
13. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

Erinnerung

Eine Klausel der Prädikatenlogik ist eine Aussage der Form

$$\varphi = \forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \bigvee_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \, ,$$

mit (prädikatenlogischen) Literalen λ_i und $FV(\bigvee_{1 \leq i \leq n} \lambda_i) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Schreib- und Sprechweise

$\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \setminus \{\bot\}$ für Klausel φ
insbes. $\emptyset$ bzw. $\square$ für Klausel $\bot$

Ist σ Substitution, so ist $\Phi \, \sigma = \{\lambda_1 \, \sigma, \ldots, \lambda_m \, \sigma\}$.

Prädikatenlogische Resolvente

Die Klausel Ψ heißt prädikatenlogische Resolvente der Klauseln Φ_1 und Φ_2, wenn es Substitutionen ρ_1, ρ_2, σ_0, natürliche Zahlen $m, n \geq 1$ und Literale $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ gibt, so daß gilt

1. ρ_1 und ρ_2 sind Variablenumbenennungen, so daß $\Phi_1\,\rho_1$ und $\Phi_2\,\rho_2$ keine gemeinsamen Variablen enthalten,
2. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Phi_1\,\rho_1$ und $\overline{\lambda'_1}, \ldots, \overline{\lambda'_n} \in \Phi_2\,\rho_2$,
3. σ_0 ist allgemeinster Unifikator von $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n\}^2$ und
4. $\Psi = \Big[\big(\Phi_1\,\rho_1 \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}\big) \cup \big(\Phi_2\,\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}, \ldots, \overline{\lambda'_n}\}\big)\Big]\,\sigma_0$.

Beispiele für prädikatenlogische Resolventen

Beispiel: Seien Φ_1 und Φ_2 variablenlose Klauseln.

Bei der Bestimmung der Resolventen werden die Substitutionen auf Formeln aus Φ_1 und aus Φ_2 angewandt, sie haben also keinen Effekt und können daher vernachlässigt werden.

Eine Klausel Ψ ist also genau dann prädikatenlogische Resolvente von Φ_1 und Φ_2, wenn es ein Literal λ gibt mit

2. $\lambda \in \Phi_1$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2$,
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \lambda'_1 = \lambda'_2 = \cdots = \lambda'_n =: \lambda$ und
4. $\Psi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}$,

d.h. wenn Ψ aussagenlogische Resolvente von Φ_1 und Φ_2 ist.

Beispiel:

Wir betrachten $\Phi_1 = \Big\{P\big(f(x)\big), \neg R(x)\Big\}$ und $\Phi_2 = \Big\{R\big(g(y)\big), R(z)\Big\}$.

Für die Variablenumbenennungen $\rho_1 = \rho_2 = \mathrm{id}$ haben die Klauseln $\Phi_1 = \Phi_1\,\rho_1$ und $\Phi_2 = \Phi_2\,\rho_2$ keine gemeinsamen Variablen.

Sei $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1\,\rho_1$ und $\lambda_1' = \neg R\big(g(y)\big)$, also $\overline{\lambda_1'} \in \Phi_2\,\rho_2$.

$\sigma_0 = \big[x := g(y)\big]$ ist ein allgemeinster Unifikator von $\big\{\lambda_1, \lambda_1'\big\}^2 = \Big\{\neg R(x), \neg R\big(g(y)\big)\Big\}^2$.

Somit ist

$$\Big[\big(\Phi_1\,\rho_1 \setminus \{\lambda_1\}\big) \cup \big(\Phi_2\,\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda_1'}\}\big)\Big]\,\sigma_0 = \Big\{P\Big(f\big(g(y)\big)\Big), R(z)\Big\}$$

eine Resolvente von Φ_1 und Φ_2.

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln $\Big\{P\Big(f\big(g(t_1)\big)\Big), R(t_2)\Big\}$ für variablenlose Terme t_1 und t_2 (vgl. Folie 12.10).

Seien jetzt $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1\,\rho_1$,
$\lambda_1' = \neg R\big(g(y)\big)$ und $\lambda_2' = \neg R(z) \in \Phi_2\,\rho_2$, so daß $\overline{\lambda_1'}, \overline{\lambda_2'} \in \Phi_2\,\rho_2$.

$\sigma_0 = \big[x := g(y)\big]\,\big[z := g(y)\big]$ ist ein allgemeinster Unifikator von $\big\{\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2'\big\}^2 = \Big\{\neg R(x), \neg R\big(g(y)\big), \neg R(z)\Big\}^2$.

Somit ist

$$\Big[\big(\Phi_1\,\rho_1 \setminus \{\lambda_1\}\big) \cup \big(\Phi_2\,\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda_1'}, \overline{\lambda_2'}\}\big)\Big]\,\sigma_0 = \Big\{P\big(f\big(g(y)\big)\big)\Big\}$$

ebenfalls eine Resolvente von Φ_1 und Φ_2.

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln $\Big\{P\big(f\big(g(t_1)\big)\big)\Big\}$ für einen variablenlosen Term t_1 (vgl. Folie 12.10).

Seien schließlich $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1\,\rho_1$ und $\lambda_1' = \neg R(z)$, so daß $\overline{\lambda_1'} \in \Phi_2\,\rho_2$.

$\sigma_0 = [x := z]$ ist ein allgemeinster Unifikator von
$\big\{\lambda_1, \lambda_1'\big\}^2 = \Big\{\neg R(x), \neg R(z)\Big\}^2$.

Somit ist

$$\Big[\big(\Phi_1\,\rho_1 \setminus \{\lambda_1\}\big) \cup \big(\Phi_2\,\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda_1'}\}\big)\Big]\,\sigma_0 = \Big\{P\big(f(z)\big), R\big(g(y)\big)\Big\}$$

ebenfalls eine Resolvente von Φ_1 und Φ_2.

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln $\Big\{P\big(f(t_2)\big), R\big(g(t_1)\big)\Big\}$ für variablenlose Terme t_1 und t_2 (vgl. Folie 12.10).

Aufgabe

Haben diese Klauseln Resolventen?
Wieviele Resolventen gibt es (bis auf Variablenumbenennungen)?

Φ_1	Φ_2	# Möglichkeiten
$\{P(x), Q(x,y)\}$	$\{\neg P(f(x))\}$	
$\{Q(g(x)), R(f(x))\}$	$\{\neg Q(f(x))\}$	
$\{P(x), P(f(x))\}$	$\{\neg P(y), Q(y,z)\}$	

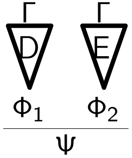
Definition (vgl. Folie 6.3)

Sei Γ Klauselmenge der Prädikatenlogik und Ψ prädikatenlogische Klausel.

$$\Psi$$

ist Resolutions-Ableitung mit Hypothese Ψ und Konklusion Ψ.

Sind D und E Resolutions-Ableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ und ist Ψ eine prädikatenlogische Resolvente von Φ_1 und Φ_2, so ergibt sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ und Konklusion Ψ:



Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ wenn es eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion Ψ gibt. Wir sagen „Ψ ist eine Resolutions-Folgerung von Γ“.

Eine Resolutions-Refutation ist eine Resolutionsableitung mit Konklusion $\Box$.

Beispiel: Betrachte die folgenden Klauseln:

$$\varphi_1 = \forall x\colon \big(P(f(x)) \vee \neg R(x)\big) \qquad \varphi_2 = \forall y, z\colon \big(R(g(y)) \vee R(z)\big)$$
$$\psi = \forall y, z\colon \big(P(f(g(y))) \vee R(z)\big)$$

bzw. (in anderer Schreibweise):

$$\Phi_1 = \Big\{P\big(f(x)\big), \neg R(x)\Big\} \qquad \Phi_2 = \Big\{R\big(g(y)\big), R(z)\Big\}$$
$$\Psi = \Big\{P\Big(f\big(g(y)\big)\Big), R(z)\Big\}$$

Dann gilt $\{\Phi_1, \Phi_2\} \vdash_{\mathrm{Res}} \Psi$.

Wir wollen $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ zeigen.

Dazu seien $\mathcal{A}$ und ρ beliebig mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Seien $a, b \in U_\mathcal{A}$ beliebig.

Angenommen, $b \notin R^\mathcal{A}$.

Wegen $\mathcal{A} \models_\rho \varphi_2$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a][z \mapsto b]} R(g(y)) \vee R(z)$.
Also haben wir $g^\mathcal{A}(a) \in R^\mathcal{A}$ oder $b \in R^\mathcal{A}$.
Da aber $b \notin R^\mathcal{A}$ angenommen wurde, folgt $g^\mathcal{A}(a) \in R^\mathcal{A}$.

Wegen $\mathcal{A} \models_\rho \varphi_1$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto g^\mathcal{A}(a)]} P(f(x)) \vee \neg R(x)$.
Also haben wir $f^\mathcal{A}(g^\mathcal{A}(a)) \in P^\mathcal{A}$ oder $g^\mathcal{A}(a) \notin R^\mathcal{A}$.
Da wir $g^\mathcal{A}(a) \in R^\mathcal{A}$ schon gezeigt haben, folgt $f^\mathcal{A}(g^\mathcal{A}(a)) \in P^\mathcal{A}$.

Damit haben wir gezeigt, daß $f^\mathcal{A}(g^\mathcal{A}(a)) \in P^\mathcal{A}$ oder $b \in R^\mathcal{A}$ gilt, d.h. $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a][z \mapsto b]} P(f(g(y))) \vee R(z)$.

Da a und b beliebig waren, haben wir $\mathcal{A} \models_\rho \psi$.

Da $\mathcal{A}$ und ρ beliebig waren mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi_1 \wedge \varphi_2$, haben wir $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$, wie angestrebt.

Diese Argumentation kann man verallgemeinern und erhält

$$\text{ist } \Psi \text{ Resolvente von } \Phi_1 \text{ und } \Phi_2 \text{, so gilt } \{\Phi_1, \Phi_2\} \models \Psi.$$

Per Induktion ergibt sich die Korrektheit der prädikatenlogischen Resolution:

Lemma

Sei Γ Menge gleichungsloser Klauseln und Φ gleichungslose Klausel mit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Phi$. Dann gilt $\Gamma \models \Phi$.

Damit erhalten wir insbesondere

Folgerung

Sei Γ Menge gleichungsloser Klauseln mit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \square$. Dann ist Γ unerfüllbar.

Damit haben wir die Korrektheit des Resolutionskalküls für die Prädikatenlogik gezeigt. Um auch die Vollständigkeit, d.h. die umgekehrte Implikation, zu beweisen, gehen wir wie folgt vor:

Sei Γ Menge gleichungsloser Klauseln und $G(\Gamma)$ die Menge ihrer Grundinstanzen. Dann gilt

Γ unerfüllbar
$\Longrightarrow$ $G(\Gamma)$ hat kein Term-Modell (Folie 13.15)
$\Longrightarrow$ $G(\Gamma)$ im aussagenlogischen Sinne unerfüllbar
(Der Beweis des Satzes auf Folie 12.4 zeigt, daß jede im aussagenlogische Sinne erfüllbare Menge variablen- und gleichungsloser Klauseln ein Term-Modell besitzt.)
$\Longrightarrow$ $G(\Gamma) \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$ durch aussagenlogische Resolution (Folie 12.7)
$\Longrightarrow$ $G(\Gamma) \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$ durch prädikatenlogische Resolution (Folie 13.4)
$\Longrightarrow$ $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$ (Folie 13.22).

Term-Strukturen und Term-Modelle

Sei $\Sigma = (\mathrm{Fun}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ eine Signatur. Wir nehmen im folgenden an, daß Fun wenigstens ein Konstantensymbol enthält. Wir bezeichnen die Menge der variablenlosen Terme mit $D(\Sigma)$.

Eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = \big(U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \mathrm{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \mathrm{Rel}}\big)$ heißt Term-Struktur, falls folgendes gilt:

1. das Universum $U_{\mathcal{A}}$ ist die Menge $D(\Sigma)$ der variablenlosen Terme,
2. für alle $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und alle $t_1, t_2, \ldots, t_k \in D(\Sigma)$ ist
$$f^{\mathcal{A}}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\,.$$

Für jede Term-Struktur $\mathcal{A}$, alle Variableninterpretationen ρ und alle variablenfreien Terme t gilt dann $\rho(t) = t$.

Ein Term-Modell von φ ist eine Term-Struktur, die gleichzeitig ein Modell von φ ist.

Lemma

Sei Γ eine Menge gleichungsloser Klauseln und $G(\Gamma)$ die Menge ihrer Grundinstanzen.
Hat $G(\Gamma)$ ein Term-Modell, so auch Γ.

Beweis:
Sei $\mathcal{A} = (D(\Sigma), (f^{\mathcal{A}})_{f\in\mathrm{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathrm{Rel}})$ ein Term-Modell von $G(\Gamma)$. Wir zeigen, daß $\mathcal{A}$ auch ein Modell von Γ ist:
Sei also $\gamma = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi \in \Gamma$.
Seien ρ eine Variableninterpretation und $t_1, \ldots, t_n \in D(\Sigma)$.
Da die Terme t_i variablenlos sind, gilt

$$
\begin{aligned}
\rho' &:= \rho[x_1 \mapsto t_1][x_2 \mapsto t_2]\cdots[x_n \mapsto t_n] \\
&= \rho[x_n \mapsto t_n][x_{n-1} \mapsto t_{n-1}]\cdots[x_1 \mapsto t_1] \\
&= \rho[x_n \mapsto \rho(t_n)][x_{n-1} \mapsto \rho(t_{n-1})]\cdots[x_1 \mapsto \rho(t_1)]
\end{aligned}
$$

(die letzte Gleichung ergibt sich, da in jeder Termstruktur $\rho(t) = t$ für alle variablenlosen Terme t gilt).

Wir erhalten

$\varphi[x_n := t_n][x_{n-1} := t_{n-1}]\cdots[x_1 := t_1] \in G(\Gamma)$

$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_\rho \varphi[x_n := t_n][x_{n-1} := t_{n-1}]\cdots[x_1 := t_1]$

$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi$ (nach dem Lemma auf Folie 10.12)

Da $t_1, \dots, t_n \in D(\Sigma)$ beliebig waren, ergibt sich $\mathcal{A} \models_\rho \gamma$.

Da ρ beliebig war, haben wir $\mathcal{A} \models \gamma$ gezeigt.

Da dies für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt, ist $\mathcal{A}$ tatsächlich ein (Term-)Modell von Γ. $\square$

Lifting-Lemma

Seien Φ_1, Φ_2 zwei gleichungslose Klauseln der Prädikatenlogik und seien Φ_1', Φ_2' zwei Grundinstanzen hiervon, die aussagenlogisch resolvierbar sind und die Resolvente Ψ' haben.
Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente Ψ von Φ_1 und Φ_2, so daß Ψ' eine Grundinstanz von Ψ ist.

Veranschaulichung des Liftig-Lemma:

- $\rightarrow$: Substitution
- —: aussagenlogische Resolution
- $\cdots$: prädikatenlogische Resolution

$$\begin{tikzcd}
\Phi_1 \arrow[d] \arrow[dr, dash, dotted] & & \Phi_2 \arrow[d] \arrow[dl, dash, dotted] \\
\Phi_1' \arrow[dr, dash] & \Psi \arrow[d] & \Phi_2' \arrow[dl, dash] \\
& \Psi' &
\end{tikzcd}$$

Beispiel:

$$
\begin{tikzcd}
\{P(f(x)), \neg R(x)\} \arrow[d, "{[x{:=}g(a)]}"] \arrow[dr, dash, dotted] & & \{R(g(y)), R(z)\} \arrow[d, "{[y{:=}a][z{:=}b]}"] \arrow[dl, dash, dotted] \\
\{P(f(g(a))), \neg R(g(a))\} \arrow[dr, dash] & \{P(f(g(y))), R(z)\} \arrow[d, "{[y{:=}a][z{:=}b]}"] & \{R(g(a)), R(b)\} \arrow[dl, dash] \\
& \{P(f(g(a))), R(b)\} &
\end{tikzcd}
$$

Beweis:
Seien ρ_1 und ρ_2 Variablenumbennungen, so daß $\Phi_1\,\rho_1$ und $\Phi_2\,\rho_2$ keine gemeinsamen Variablen haben.

Da Φ'_i Grundinstanz von Φ_i und ρ_i Variablenumbenennung ist, ist Φ'_i auch Grundinstanz von $\Phi_i\,\rho_i$. Sei also σ_i eine Substitution mit $\Phi'_i = \Phi_i\,\rho_i\,\sigma_i$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathrm{Def}(\sigma_i)$ die Menge der in $\Phi_i\,\rho_i$ vorkommenden Variablen ist. Hieraus folgt $\mathrm{Def}(\sigma_1) \cap \mathrm{Def}(\sigma_2) = \emptyset$.

Damit ist die folgende Substitution σ wohldefiniert:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1(x) & \text{falls } x \in \mathrm{Def}(\sigma_1) \\ \sigma_2(x) & \text{falls } x \in \mathrm{Def}(\sigma_2) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\Phi'_i = \Phi_i\rho_i\,\sigma_i = \Phi_i\rho_i\,\sigma$.

Nach Voraussetzung ist Ψ' aussagenlogische Resolvente von Φ_1' und Φ_2'.

Also gibt es $\lambda \in \Phi_1'$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2'$ mit

$$\Psi' = \big(\Phi_1' \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\Phi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\}\big).$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Phi_1\,\rho_1$ und $\overline{\lambda_1'}, \ldots, \overline{\lambda_n'} \in \Phi_2\,\rho_2$ diejenigen Literale, für die gilt:

$$\lambda = \lambda_1\,\sigma = \cdots = \lambda_m\,\sigma \text{ und } \overline{\lambda} = \overline{\lambda_1'}\,\sigma = \cdots = \overline{\lambda_n'}\,\sigma$$

(es gibt solche Literale wegen $\lambda \in \Phi_1' = \Phi_1\,\rho_1\,\sigma$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2' = \Phi_2\,\rho_2\,\sigma$, also $m, n \geq 1$).

Mit

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_1', \ldots, \lambda_n'\}\,.$$

ist σ also ein Unifikator von Λ^2.

Sei σ_0 ein allgemeinster Unifikator von Λ^2. Dann ist

$$\Psi = \Big(\big(\Phi_1\, \rho_1 \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}\big) \cup \big(\Phi_2\, \rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}, \ldots, \overline{\lambda'_n}\}\big) \Big)\, \sigma_0$$

eine prädikatenlogische Resolvente von Φ_1 und Φ_2.

Da σ_0 allgemeinster Unifikator von Λ^2 und σ ein Unifikator von Λ^2 ist, existiert eine Substitution τ mit $\sigma_0\, \tau = \sigma$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Psi' &= \big(\Phi'_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\Phi'_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big) \\
&= \big(\Phi_1\rho_1\, \sigma \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\Phi_2\rho_2\, \sigma \setminus \{\overline{\lambda}\}\big) \\
&= \big(\Phi_1\rho_1\, \sigma \setminus \{\lambda_1\sigma, \ldots, \lambda_m\sigma\}\big) \cup \big(\Phi_2\rho_2\, \sigma \setminus \{\overline{\lambda'_1}\sigma, \ldots, \overline{\lambda'_n}\sigma\}\big) \\
&= \Big(\big(\Phi_1\rho_1 \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}\big) \cup \big(\Phi_2\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}, \ldots, \overline{\lambda'_n}\}\big) \Big)\, \sigma \\
&= \Big(\big(\Phi_1\rho_1 \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}\big) \cup \big(\Phi_2\rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}, \ldots, \overline{\lambda'_n}\}\big) \Big)\, \sigma_0\tau \\
&= \Psi\, \tau
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß Ψ' eine Grundinstanz von Ψ ist. $\square$

Durch Induktion über die Größe der Resolutions-Ableitung erhält man

Lemma

Sei Γ eine Menge von gleichungslosen Klauseln der Prädikatenlogik, $G(\Gamma)$ die Menge ihrer Grundinstanzen und Ψ' eine variablen- und gleichungslose Klausel mit $G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \Psi'$.
Dann existiert eine gleichungslose Klausel Ψ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$, so daß Ψ' Grundinstanz von Ψ ist.
Ist Γ Menge von gleichungslosen Horn-Klauseln, so gilt obige Aussage analog für die Horn-Resolution $\vdash_{\text{Horn}}$.

Da nur $\Psi' = \Box$ Grundinstanz von $\Psi = \Box$ ist, erhalten wir:

Folgerung

Sei Γ eine Menge von gleichungslosen Klauseln der Prädikatenlogik und $G(\Gamma)$ die Menge ihrer Grundinstanzen mit $G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \Box$.
Dann gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$.
Ist Γ Menge von gleichungslosen Horn-Klauseln, so gilt sogar $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$.

Satz

Sei Γ Menge gleichungsfreier Klauseln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$$

Sind alle Klauseln in Γ sogar Hornklauseln, so haben wir

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

Beweis: Die Implikationen "$\Leftarrow$" (d.h. die Korrektheit) ergeben sich aus der Folgerung auf Folie 13.12.
Der Beweis der Implikationen „$\Rightarrow$" (d.h. die Vollständigkeit) folgt dem Plan auf Folie 13.13. $\Box$

Zusammenfassung 13. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- prädikatenlogische Resolution:
  - Definition
  - Vollständigkeit und Korrektheit als Unerfüllbarkeitstest für Mengen gleichungsloser Klauseln
- Vollständigkeit und Korrektheit der Horn-Resolution als Unerfüllbarkeitstest für Mengen gleichungsloser Horn-Klauseln

kommende (letzte) Vorlesung

- Unerfüllbarkeitstest für beliebige gleichungslose Formelmengen