Logik und Logikprogrammierung
14. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

Ziel der heutigen Vorlesung: Nutzung der Resolution, um Folgerungen der Form

$$\Delta \models \psi$$

zu beweisen (wobei Δ eine Menge von Aussagen und ψ eine Aussage ist).

Dazu:

$$\begin{aligned}
\Delta \models \psi \quad &\iff \quad \Delta \cup \{\neg\psi\} \text{ unerfüllbar} \\
&\iff \quad \text{es gibt eine endliche, unerfüllbare Menge } \Delta' \subseteq \Delta \cup \{\neg\psi\} \\
&\iff \quad \varphi := \bigwedge_{\delta \in \Delta'} \delta' \text{ unerfüllbar}
\end{aligned}$$

Idee: Berechne aus beliebiger (gleichungslosen) Aussage φ eine (gleichungslose) Menge von Klauseln Γ mit

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ unerfüllbar} \quad &\iff \quad \Gamma \text{ unerfüllbar} \\
&\iff \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box
\end{aligned}$$

Klauseln sind Aussagen

- in denen alle Quantoren am Anfang stehen,
- es nur Universalquantoren gibt und
- hinter den Quantoren eine Disjunktion von Literalen steht.

$\Longrightarrow$ wir müssen diese drei Eigenschaften erzwingen, d.h. eine beliebige Aussage erst in „Pänexform“, dann in „Skolemform“, dann in „Klauselform“ und dann in eine endliche Menge von Klauseln umwandeln (ohne Gleichungen einzuführen).

Pränexform

Ziel: Berechnung einer äquivalenten Formel, in der alle Quantoren am Anfang stehen.

Definition

Eine Σ-Formel ist in Pränexform, wenn sie die Gestalt

$$Q_1 x_1\ Q_2 x_2\ \dots Q_k x_k : \varphi$$

hat mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_k \in \{\exists, \forall\}$, x_i paarweise verschieden und φ quantorenfrei.

Idee: Ziehe alle Quantoren nach vorne,
ersetze z.B. $\alpha \wedge \exists x\colon \beta$ durch $\exists x\colon (\alpha \wedge \beta)$

Beispiel

- $\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \exists x\colon \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = x$ wird zu
  $\exists x\colon \left(\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = x\right)$
  Lösung: neue Variable y, die nicht in α vorkommt
  $\leadsto \exists y\colon \left(\mathrm{Jünger}(x, \mathrm{Robert}) \wedge \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y\right)$
- $\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \exists x\colon \mathrm{Mutter}(x) = y$ wird zu
  $\exists y\colon \left(\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \mathrm{Mutter}(y) = y\right)$
  Lösung: neue Variable, die auch nicht in β vorkommt
  $\leadsto \exists y'\colon (\mathrm{Vater}(\mathrm{Franz}) = \mathrm{Robert} \wedge \mathrm{Mutter}(y') = y)$
- $\neg\forall y\colon \mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y$ wird zu $\forall y\colon \neg\mathrm{Mutter}(\mathrm{Robert}) = y$
  Lösung: vertausche Quantoren $\leadsto \exists y\colon \neg\mathrm{Mutter}(x) = y$
- $\exists x\colon \left(\mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit} \to \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})\right)$ entsteht aus
  $\left(\exists x\colon \mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit}\right) \to \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})$
  Lösung: vertausche auch hier Quantoren
  $\leadsto \forall x\colon \left(\mathrm{Mutter}(x) = \mathrm{Margit} \to \mathrm{Mann}(\mathrm{Margit})\right)$

Lemma

Seien $Q \in \{\exists, \forall\}$ und $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.
Sei $\varphi = \alpha \oplus Qx\,\beta$ und sei y eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt. Dann gilt

$$\varphi \equiv \begin{cases} Qy\,(\alpha \oplus \beta[x := y]) & \text{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\ \forall y\,(\alpha \leftarrow \beta[x := y]) & \text{falls } \oplus = \leftarrow, Q = \exists \\ \exists y\,(\alpha \leftarrow \beta[x := y]) & \text{falls } \oplus = \leftarrow, Q = \forall \end{cases}$$

Weiterhin gelten

$$\neg\forall x\,\alpha \equiv \exists x\,\neg\alpha \text{ und } \neg\exists x\,\alpha \equiv \forall x\,\neg\alpha\,.$$

Beweis:
der Fall $Q = \exists$ und $\oplus = \wedge$:
Seien $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation.
Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ setze $\rho_a := \rho[y \mapsto a]$.
Dann gilt $\rho_a\big[x \mapsto \rho_a(y)\big](z) = \rho[x \mapsto a](z)$ für alle $z \neq y$ (*)

Wir erhalten also

$\mathcal{A} \models_\rho (\alpha \wedge \exists x\, \beta)$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$ und $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\, \beta$

$\iff$ (es gilt $\mathcal{A} \models_\rho \alpha$) und (es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit ($\mathcal{A} \models_\rho \alpha$ und $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \beta$)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \alpha$ (da y in α nicht vorkommt)
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(y)]} \beta$ (nach (*), da y in β nicht vorkommt)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit

- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \alpha$
- $\mathcal{A} \models_{\rho_a} \beta[x := y]$ (Folie 10.12)

$\iff$ es gibt $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a]} \alpha \wedge \beta[x := y]$

$\iff$ $\mathcal{A} \models_\rho \exists y \left(\alpha \wedge \beta[x := y]\right)$

Die Fälle $Q = \forall$ bzw. $\oplus = \vee$ werden analog behandelt.

Der Fall $Q = \exists$ und $\oplus = \leftarrow$:

$$\begin{aligned}
\alpha \leftarrow (\exists x\, \beta) &\equiv \alpha \vee \neg(\exists x\, \beta) \\
&\equiv \alpha \vee \neg(\neg\forall x\, \neg\beta) \\
&\equiv \alpha \vee (\forall x\, \neg\beta) \\
&\equiv \forall y \left(\alpha \vee \neg\beta[x := y]\right) \\
&\equiv \forall y \left(\alpha \leftarrow \beta[x := y]\right)
\end{aligned}$$

Die restlichen Fälle sind analog. $\square$

Satz

Aus einer Formel φ kann eine äquivalente Formel φ' in Pränexform berechnet werden.

Ist φ eine Aussage, so auch φ'.

Ist φ gleichungslos, so auch φ'.

Beweis: Die Berechnung erfolgt induktiv über den Aufbau von φ:
I.A. φ ist atomare Formel: Setze $\varphi' = \varphi$.

I.S.

- $\varphi = \neg\psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Mit $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$ setze

$$\varphi' = \overline{Q_1} x_1\, \overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_m}\, x_m\, \neg\psi' \,.$$

- $\varphi = \exists x\, \psi$: Nach I.V. kann Formel in Pränexform

$$\psi \quad \equiv \quad Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi'$$

berechnet werden. Setze

$$\varphi' = \begin{cases} \exists x\, Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{falls } x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \\ Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \psi' & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Nach I.V. können Formeln in Pränexform

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0 \\ \beta &\equiv Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{aligned}$$

berechnet werden. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$ neue Variable.

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha \wedge \beta \\ &\equiv (Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0) \wedge (Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0) \\ &\equiv Q_1 z_1 \begin{pmatrix} & (Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_0)[x_1 := z_1] \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{pmatrix} \\ &= Q_1 z_1 \begin{pmatrix} & Q_2 x_2 \ldots Q_m\, x_m\, \alpha_1 \\ \wedge & Q'_1 y_1\, Q'_2 y_2 \ldots Q'_n\, y_n\, \beta_0 \end{pmatrix} \\ &\qquad \text{mit } \alpha_1 = \alpha_0[x_1 := z_1] \\ &\vdots \\ &\equiv Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m\, Q'_1 z_{m+1} \ldots Q'_n z_{m+n}\, (\alpha_m \wedge \beta_n) \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x\, \psi$: analog zum Fall $\varphi = \exists x\, \psi$
- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$
- $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$: analog zum Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$ (es ändern sich die Quantoren in α!) $\square$

Skolemform

Ziel: Elimination der Existenzquantoren in einer Formel in Pränexform

Definition

Eine Σ-Formel ist in Skolemform, wenn sie die Gestalt

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \forall x_k \, \varphi$$

hat mit x_i paarweise verschieden und φ quantorenfrei.

Idee:

$$\forall x \exists y \, \big(\mathrm{befreundet}(x, y) \wedge \mathrm{weiblich}(y)\big)$$

besagt „Jeder Mensch hat eine Freundin", d.h. es gibt eine Funktion $\mathrm{Freundin}$ mit $\forall x \colon \Big(\mathrm{befreundet}\big(x, \mathrm{Freundin}(x)\big) \wedge \mathrm{weiblich}\big(\mathrm{Freundin}(x)\big)\Big)$

Konstruktion: Sei $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \exists y\, \psi$ Formel in Pränexform (u.U. enthält ψ weitere Quantoren).

Sei $g \notin \mathrm{Fun}$ ein neues m-stelliges Funktionssymbol.

Setze $\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m\, \psi\big[y := g(x_1, \ldots, x_m)\big]$.

Offensichtlich hat φ' einen Existenzquantor weniger als φ. Außerdem ist φ' keine Σ-Formel (denn sie verwendet $g \notin \mathrm{Fun}$), sondern Formel über einer erweiterten Signatur.

Lemma

Die Formeln φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{A}'$ Struktur und ρ' Variableninterpretation mit $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$. Wir zeigen $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$. Hierzu seien $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}'}$ beliebig. Setze

$$\overline{\rho} = \rho'[x_1 \mapsto a_1][x_2 \mapsto a_2] \cdots [x_m \mapsto a_m]$$

und $b = g^{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_m)$.

Dann gilt
$\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi'$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \psi[y := g(x_1, \ldots, x_m)]$
$\Longrightarrow$ (Folie 10.12) $\mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}[y \mapsto b]} \psi$
$\Longrightarrow \mathcal{A}' \models_{\overline{\rho}} \exists y\, \psi$
Da $a_1, \ldots, a_m$ beliebig sind, haben wir $\mathcal{A}' \models_{\rho'} \varphi$ gezeigt.

„$\Rightarrow$" Sei nun $\mathcal{A}$ Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$.

Zunächst definieren wir eine Funktion $G\colon U_{\mathcal{A}}^m \to U_{\mathcal{A}}$: seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig
$\implies \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m]} \exists y\, \psi$

$\implies$ es gibt $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1]\cdots[x_m \mapsto a_m][y \mapsto b]} \psi$

Setze $G(a_1, \ldots, a_m) := b$, womit die Definition der Funktion G abgeschlossen ist.

Definiere eine neue Struktur $\mathcal{A}'$ über der Signatur $(\mathrm{Fun} \uplus \{g\}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ mit

- $U_{\mathcal{A}'} = U_{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{A}'} = f^{\mathcal{A}}$ für alle Funktionssymbole $f \in \mathrm{Fun}$,
- $R^{\mathcal{A}'} = R^{\mathcal{A}}$ für alle $R \in \mathrm{Rel}$ und
- $g^{\mathcal{A}'} = G$.

Seien nun $a_1, \ldots, a_m \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig.
Dann gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$$
$$\Longrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1] \cdots [x_m \mapsto a_m]} \exists y\, \psi$$
$$\xRightarrow{\text{Definition von } G} \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1] \cdots [x_m \mapsto a_m][y \mapsto G(a_1, \ldots, a_m)]} \psi$$
$$\Longrightarrow \text{(Folie 10.12) } \mathcal{A} \models_{\rho[x_1 \mapsto a_1] \cdots [x_m \mapsto a_m]} \psi\big[y := g(x_1, \ldots, x_m)\big]$$

Da das Tupel $a_1, \ldots, a_m$ beliebig war, haben wir $\mathcal{A}' \models_\rho \varphi'$ gezeigt, d.h. φ' ist erfüllbar. □

Satz

Aus einer Formel φ kann man eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\overline{\varphi}$ in Skolemform berechnen.

Ist φ Aussage, so auch $\overline{\varphi}$. Ist φ gleichungslos, so auch $\overline{\varphi}$.

Beweis: Nach Folie 14.9 kann zu φ äquivalente Formel

$$\varphi_0 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_\ell x_\ell \, \psi$$

in Pränexform berechnet werden (mit $n \leq \ell$ Existenzquantoren). Durch wiederholte Anwendung des vorherigen Lemmas erhält man Formeln φ_i, $\varphi_2, \ldots \varphi_n$ mit folgenden Eigenschaften:

- φ_i und φ_{i+1} sind erfüllbarkeitsäquivalent mit denselben freien Variablen.
- φ_{i+1} enthält einen Existenzquantor weniger als φ_i.
- φ_{i+1} ist in Pränexform.
- Ist φ_i gleichungslos, so auch φ_{i+1}.

Dann ist $\overline{\varphi} = \varphi_n$ erfüllbarkeitsäquivalente (ggf. gleichungslose) Formel in Skolemform. □

Beispiel

1. Die Skolemform von

$$\varphi_0 = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \Big(P(x, h(x_2, f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(x_4, x) \Big)$$

ergibt sich wie folgt:

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_3 \exists x_4 \Big(P(x, h(g_1(x_1), f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(x_4, x) \Big)$$

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_3 \Big(P(x, h(g_1(x_1), f(x_1))) \vee \neg Q(x_3) \vee R(g_2(x_1, x_3), x) \Big)$$

2. Die Skolemform von $\exists x\, P(x)$ ist $P(a)$ für eine neue Konstante a.
Aber: $\big(\exists x\, P(x)\big) \not\equiv \big(P(a)\big)$.
Das heißt, der Beweis liefert tatsächlich nur eine erfüllbarkeitsäquivalente, aber i.a. nicht äquivalente Formel (es existiert auch keine äquivalente Formel in Skolemform).

Klauselform

Ziel: Berechnung einer äquivalenten Konjunktion von Klauseln aus einer Aussage in Skolemform

Definition

Eine Formel ist in Klauselform, wenn sie Konjunktion von Klauseln ist, also insbes. Aussage ist.

Lemma

Aus einer Aussage φ in Skolemform kann man eine äquivalente Formel φ' in Klauselform berechnen.

Ist φ gleichungslos, so auch φ'.

Beweis: Sei $\varphi = \forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \colon \psi$ wobei ψ keine Quantoren enthält, d.h. aus den Atomformeln mittes $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ und $\neg$ entsteht. Mit Hilfe der Äquivalenzen von Folie 6.16 kann ψ umgeformt werden in konjunktive Normalform, d.h. in eine Formel

$$\psi' = \bigwedge_{1 \le i \le k} \bigvee_{1 \le j \le n_i} \lambda_{ij} \,,$$

wobei die Formeln λ_{ij} Literale sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \colon \psi' \\ &\equiv \left(\bigwedge_{1 \le i \le k} \forall x_1 \, \forall x_2 \, \ldots \, \forall x_n \colon \bigvee_{1 \le j \le n_i} \lambda_{ij} \right) =: \varphi' \end{aligned}$$

$\square$

Satz

Aus einer Aussage φ kann eine erfüllbarkeitsäquivalente Menge von Klausel Γ berechnet werden.

Ist φ gleichungslos, so auch alle Klauseln aus Γ.

Beweis: Nach dem Satz auf Folie 14.18 und dem Lemma auf Folie 14.21 kann φ in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \varphi_i$$

umgewandelt werden, wobei die Formeln φ_i Klauseln sind. Mit $\Gamma = \{\varphi_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ erhalten wir die gewünschte Klauselmenge. $\square$

Beweis einer Folgerung

Sei Δ Menge gleichungsloser Aussagen und ψ eine gleichungslose Aussage.

$$
\begin{aligned}
\Delta \models \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta \cup \{\neg\psi\} \text{ unerfüllbar} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine endliche, unerfüllbare Menge } \Delta' \subseteq \Delta \cup \{\neg\psi\} \\
&\qquad\qquad \text{(nach dem Endlichkeitssatz)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi := \bigwedge_{\delta \in \Delta'} \delta' \text{ unerfüllbar} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \text{ unerfüllbar} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Box\,,
\end{aligned}
$$

wobei Γ die aus φ mittels des Satzes auf Folie 14.22 berechnete Klauselmenge ist.

Zusammenfassung 14. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Beweisverfahren für Folgerungen $\Delta \models \varphi$ für gleichungslose Aussage φ bzw. -Menge Δ

Zusammenfassung Prädikatenlogik

- aussagenlogische Formeln formalisieren Aussagen, die aus atomaren Zusammenhängen mittels Boolescher Operatoren ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) und Quantoren $\forall$ und $\exists$ entstehen
- die Regeln des natürlichen Schließens formalisieren die üblichen Argumentationsmuster
- das natürliche Schließen ist vollständig und korrekt für die Feststellung, ob eine Folgerung gilt
- Endlichkeitssatz und Satz von Löwenheim-Skolem
- die Resolution bzw. Horn-Resolution ist vollständig und korrekt für die Feststellung, ob eine Menge von gleichungslosen Klauseln bzw. Horn-Klauseln erfüllbar ist
- die Einschränkung der Horn-Resolution auf die SLD-Resolution bildet die Grundlage der logischen Programmierung
- durch die Umwandlung einer beliebigen Formel in Klauselform kann die Resolution auch für den Beweis einer Folgerung zwischen gleichungslosen Aussagen genutzt werden