Logik und Logikprogrammierung
3. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

Semantik

Formeln sollen Verknüpfungen von Aussagen widerspiegeln, wir haben dies zur Motivation der einzelnen Regeln des natürlichen Schließens genutzt.

Aber die Begriffe „syntaktische Folgerung“ und „Theorem“ sind rein syntaktisch definiert (vgl. Folie 2.24).

Erst die jetzt zu definierende „Semantik“ gibt den Formeln „Bedeutung“, wobei wir den Ideen von George Boole folgen.

Idee der Semantik: wenn man jeder atomaren Formel p_i einen **Wahrheitswert** zuordnet, so kann man den Wahrheitswert jeder Formel berechnen.

Hier betrachten wir die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ bzw. 1 und 0.

Eine Belegung ist eine Abbildung $\mathcal{B}\colon V \to \{0,1\}$, wobei $V \subseteq \{p_0, p_1, \ldots\}$ eine Menge atomarer Formeln ist.

Die Belegung $\mathcal{B}\colon V \to \{0,1\}$ paßt zur Formel φ, falls alle atomaren Formeln aus φ zu V gehören.

Induktiv über den Formelaufbau definieren wir den Wahrheitswert $\widehat{\mathcal{B}}(\varphi) \in \{0,1\}$ jeder zu $\mathcal{B}$ passenden Formel φ:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{B}}(\bot) &= 0 \\
\widehat{\mathcal{B}}(p) &= \mathcal{B}(p) \quad \text{falls } p \text{ eine atomare Formel ist} \\
\widehat{\mathcal{B}}((\varphi \wedge \psi)) &= \min\bigl(\widehat{\mathcal{B}}(\varphi), \widehat{\mathcal{B}}(\psi)\bigr) \\
\widehat{\mathcal{B}}((\varphi \vee \psi)) &= \max\bigl(\widehat{\mathcal{B}}(\varphi), \widehat{\mathcal{B}}(\psi)\bigr) \\
\widehat{\mathcal{B}}((\varphi \to \psi)) &= \max\bigl(1 - \widehat{\mathcal{B}}(\varphi), \widehat{\mathcal{B}}(\psi)\bigr) \\
\widehat{\mathcal{B}}(\neg\varphi) &= 1 - \widehat{\mathcal{B}}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Wir schreiben im folgenden $\mathcal{B}(\varphi)$ anstatt $\widehat{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Beispiel

Betrachte die Formel $\varphi = \big((p \wedge q) \to (q \wedge p)\big)$.
Für eine beliebige Belegung $\mathcal{B}\colon \{p, q\} \to \{0, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\varphi) &= \max\big(1 - \mathcal{B}(p \wedge q), \mathcal{B}(q \wedge p)\big) \\
&= \max\big(1 - \min\big(\mathcal{B}(p), \mathcal{B}(q)\big), \min\big(\mathcal{B}(q), \mathcal{B}(p)\big)\big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Folgerung, Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Eine Formel φ heißt eine semantische Folgerung der Formelmenge Γ, falls für jede Belegung $\mathcal{B}$, die zu allen Formeln aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ paßt, gilt:

$$\text{Wenn } \mathcal{B}(\gamma) = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \text{ gilt, so gilt auch } \mathcal{B}(\varphi) = 1.$$

Wir schreiben $\Gamma \models \varphi$, falls φ eine semantische Folgerung von Γ ist.

Bemerkung

Im Gegensatz zur Beziehung $\Gamma \vdash \varphi$, d.h. zur syntaktischen Folgerung, ist $\Gamma \models \varphi$ eine semantische Beziehung.

Wahrheitstafel:

RL	AK	BK	$AK \vee BK$	$AK \to BK$	$(BK \wedge RL) \to \neg AK$	RL	$\neg AK$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0

Wir erhalten also

$$\left\{\begin{array}{l}(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK),\\ ((BK \wedge RL) \rightarrow \neg AK), RL\end{array}\right\} \models \neg AK$$

und können damit sagen

„Wenn die Aussagen „Bauteil *A* oder Bauteil *B* ist kaputt“ *und* „daraus, daß Bauteil *A* kaputt ist, folgt, daß Bauteil *B* kaputt ist“ *und* . . . wahr sind,

. . . dann kann man die Folgerung ziehen: die Aussage „das Bauteil *A* ist heil“ ist wahr.“

Erinnerung

Auf Folie 1.29 bzw. in der 1. Übung wurde gezeigt:

$$\left\{\begin{array}{l}(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK),\\ ((BK \wedge RL) \rightarrow \neg AK), RL\end{array}\right\} \vdash \neg AK$$

Eine Formel φ ist allgemeingültig, gültig oder Tautologie, wenn $\emptyset \models \varphi$ gilt, d.h. wenn $\mathcal{B}(\varphi) = 1$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt. Hierfür schreibt man auch $\models \varphi$.

Eine Formelmenge Γ ist erfüllbar, wenn es eine Belegung $\mathcal{B}$ gibt, die zu allen Formeln aus Γ paßt, so daß $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt.
Eine Formel φ ist erfüllbar, wenn die Formelmenge $\{\varphi\}$ erfüllbar ist, d.h. wenn es zu φ passende Belegung $\mathcal{B}$ gibt mit $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.

Lemma

Sei Γ Formelmenge und φ Formel.

- φ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar.
- $\Gamma \models \varphi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.
- Γ unerfüllbar gdw. $\Gamma \models \bot$.

Beweis:

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi \text{ gültig} & \iff & \mathcal{B}(\varphi) = 1 \text{ f.a. passenden Belegungen } \mathcal{B} \\
& \iff & \mathcal{B}(\neg\varphi) = 0 \text{ f.a. passenden Belegungen } \mathcal{B} \\
& \iff & \neg\varphi \text{ unerfüllbar} \\
\Gamma \models \varphi & \iff & \big(\mathcal{B}(\gamma) = 1 \text{ f.a. } \gamma \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1\big) \text{ f.a. Belegungen } \mathcal{B} \\
& \iff & \text{keine Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt} \\
& & \qquad \mathcal{B}(\gamma) = 1 \text{ f.a. } \gamma \in \Gamma \text{ und } \mathcal{B}(\neg\varphi) = 1 \\
& \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\Gamma \text{ unerf.} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\bot\} \text{ unerf.} \iff \Gamma \models \bot
\end{array}
$$

$\square$

Lemma

Γ endliche Formelmenge, φ Formel. Dann sind äquivalent:

(1) $\bigwedge\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma \wedge \neg\varphi$ ist unerfüllbar

(2) $\Gamma \models \varphi$

(3) $\bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma} \neg\gamma \vee \varphi$ ist allgemeingültig

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \text{keine Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt } \mathcal{B}\left(\bigwedge \gamma \wedge \neg\varphi\right) = 1 \text{ (d.h. (1))} \\
\iff\quad & \text{keine Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt } \mathcal{B}(\gamma) = \mathcal{B}(\neg\varphi) = 1 \text{ f.a. } \gamma \in \Gamma \\
\iff\quad & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ unerfüllbar (d.h. (2) nach vorherigem Lemma)} \\
\iff\quad & \text{jede Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt } \mathcal{B}(\gamma) = 0 \text{ f.e. } \gamma \in \Gamma \text{ oder } \mathcal{B}(\neg\varphi) = 0 \\
\iff\quad & \text{jede Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt } \mathcal{B}(\neg\gamma) = 1 \text{ f.e. } \gamma \in \Gamma \text{ oder } \mathcal{B}(\varphi) = 1 \\
\iff\quad & \text{jede Belegung } \mathcal{B} \text{ erfüllt } \mathcal{B}\left(\bigvee \neg\gamma \vee \varphi\right) = 1 \text{ (d.h. (3))}
\end{aligned}$$

$\square$

Überblick

Wir haben definiert

$\Gamma \vdash \varphi$	$\Gamma \models \varphi$
syntaktische Folgerung	semantische Folgerung
Theorem („hypothesenlos ableitbar“)	Tautologie („wird immer zu 1 ausgewertet“)

Frage

Was ist die Beziehung zwischen diesen Begriffen, insbes. zwischen „Theorem“ und „Tautologie“?

Korrektheit

Können wir durch mathematische Beweise zu falschen Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu falschen Aussagen kommen?

Existieren eine Formelmenge Γ und eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \not\models \varphi$?

Korrektheitslemma

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Induktion über die Größe der Deduktion D (d.h. Anzahl der Regelanwendungen).

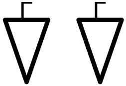
IA die kleinste Deduktion D hat die Form φ mit Hypothese φ und Konklusion φ. Sei $\mathcal{B}$ passende Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$. z.Z. ist $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.

Hypothesen von D in $\Gamma \Longrightarrow \varphi \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{B}(\varphi) = 1$

IV Behauptung gelte für alle Deduktionen, die kleiner sind als D.

IS Wir unterscheiden verschiedene Fälle, je nachdem, welche Regel als letzte angewandt wurde.

($\wedge$I) Die Deduktion D hat die Form



$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge\mathsf{I})$$

mit $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Sei $\mathcal{B}$ passende Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Zu zeigen ist $\mathcal{B}(\varphi) = 1$. Nach IV gilt

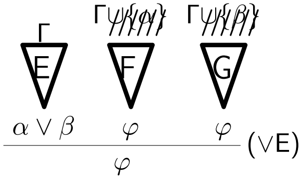
$$\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta) = 1$$

und damit

$$1 = \min\big(\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)\big) = \mathcal{B}(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{B}(\varphi)\,.$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig war mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$, haben wir $\Gamma \models \varphi$ gezeigt.

(∨E) Die Deduktion D hat die Form



Also gibt es Deduktion E mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\alpha \vee \beta$ und Deduktionen F und G mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\alpha\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\beta\}$ und Konklusion φ. Sei $\mathcal{B}$ passende Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$. Nach IV gelten

(1) $\mathcal{B}(\alpha \vee \beta) = 1$.
(2) Gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$, so auch $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.
(3) Gilt $\mathcal{B}(\beta) = 1$, so auch $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $\mathcal{B}(\alpha) = 1$: Aus (2) ergibt sich also $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.
- $\mathcal{B}(\alpha) \neq 1$, also $\mathcal{B}(\alpha) = 0$. Aus (1) erhalten wir $1 = \mathcal{B}(\alpha \vee \beta) = \max\big(\mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)\big) = \max\big(0, \mathcal{B}(\beta)\big)$ und damit $\mathcal{B}(\beta) = 1$. Aus (3) ergibt sich also $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.

Da $\mathcal{B}$ beliebig war mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$, haben wir $\Gamma \models \varphi$ gezeigt.

($\to$I) Die Deduktion D hat die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\cancel{\cup\{\alpha\}}\\ \bigtriangledown \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\,(\to\mathrm{I})$$

mit $\varphi = \alpha \to \beta$. Sei $\mathcal{B}$ eine passende Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Zu zeigen ist $\mathcal{B}(\varphi) = 1$. Nach IV haben wir:

Wenn $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ gilt, so gilt auch $\mathcal{B}(\beta) = 1$.

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

- $\mathcal{B}(\alpha) = 0$: Dann gilt
  $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\alpha \to \beta) = \max\big(1 - \mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)\big) = \max\big(1, \mathcal{B}(\beta)\big) = 1$
- $\mathcal{B}(\alpha) = 1$: Dann gilt nach IV $\mathcal{B}(\beta) = 1$ und damit
  $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\alpha \to \beta) = \max\big(1 - \mathcal{B}(\alpha), \mathcal{B}(\beta)\big) = \max(0, 1) = 1$

Da $\mathcal{B}$ beliebig war mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$, haben wir $\Gamma \models \varphi$ gezeigt.

(raa) Die Deduktion D hat die Form

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\cancel{\cup\{\neg\varphi\}}\\ \nabla \\ \perp\end{array}}{\varphi}\,(\mathrm{raa})$$

Sei $\mathcal{B}$ eine passende Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Zu zeigen ist $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.
Wegen $\mathcal{B}(\perp) = 0$ kann nach IV nicht $\mathcal{B}(\psi) = 1$ f.a. $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ gelten. Es gibt also $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ mit $\mathcal{B}(\psi) = 0$. Wegen $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$ folgt $0 = \mathcal{B}(\neg\varphi) = 1 - \mathcal{B}(\varphi)$.
Also haben wir $\mathcal{B}(\varphi) = 1$.
Da $\mathcal{B}$ beliebig war mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$, haben wir $\Gamma \models \varphi$ gezeigt.

Ist die letzte Schlußregel in der Deduktion D von der Form ($\wedge$I), ($\vee$E), ($\rightarrow$I) oder (raa), so haben wir die Behauptung des Lemmas gezeigt. Analog kann dies für die verbleibenden Regeln getan werden. $\square$

Korrektheitssatz

Für jede Formelmenge Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi \,.$$

Beweis: Wegen $\Gamma \vdash \varphi$ existiert eine Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ. Nach dem Korrektheitslemma folgt $\Gamma \models \varphi$. $\square$

Korollar

Jedes Theorem ist Tautologie.

Vollständigkeit

Können wir durch mathematische Beweise zu allen korrekten Aussagen kommen?

Können wir durch das natürliche Schließen zu allen korrekten Aussagen kommen?

Existieren eine Formelmenge Γ und eine Formel φ mit $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \nvdash \varphi$?

Plan

z.z. ist $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.

dies ist äquivalent zu $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi$.

hierzu gehen wir folgendermaßen vor:

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma \nvdash \varphi & & \Gamma \not\models \varphi \\
\Updownarrow \text{(Folie 3.22)} & & \Updownarrow \text{(Folie 3.9)} \\
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar} \\
\Downarrow \text{(Folie 3.25)} & & \Uparrow \text{(klar)} \\
\exists \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ maximal konsistent} & \underset{\text{(Folie 4.2)}}{\Longrightarrow} & \Delta \text{ erfüllbar}
\end{array}
$$

Konsistente Mengen

Definition

Sei Γ eine Menge von Formeln.
Γ heißt inkonsistent, wenn $\Gamma \vdash \bot$ gilt. Sonst heißt Γ konsistent.

Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent.}$$

Beweis:

Wir zeigen „$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent“:

Richtung „$\Rightarrow$“, gelte also $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longrightarrow$ es gibt Deduktion D mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ

$\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion $\bot$:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla D \\ \varphi\end{array}}{\bot}\,(\neg\mathrm{E})$$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$, d.h. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist inkonsistent.

Richtung „$\Leftarrow$“, sei also $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent.

$\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ und Konklusion $\bot$.

$\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\Gamma\cup\{\neg\varphi\}}\\ D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(\text{raa})$$

$\Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ $\square$

Maximal konsistente Mengen

Definition

Eine Formelmenge Δ ist maximal konsistent, wenn sie konsistent ist und wenn gilt „$\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent $\Longrightarrow \Sigma = \Delta$“.

Satz

Jede konsistente Formelmenge Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmenge Δ enthalten.

Beweis:
Sei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Liste aller Formeln (da wir abzählbar viele atomare Formeln haben, gibt es nur abzählbar viele Formeln)

Wir definieren induktiv konsistente Mengen Γ_n:

- Setze $\Gamma_1 = \Gamma$
- Setze $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls diese Menge konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst.} \end{cases}$

Setze nun $\Delta = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n$.

1. Wir zeigen indirekt, daß Δ konsistent ist: Angenommen, $\Delta \vdash \bot$.

   $\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Konklusion $\bot$ und endlicher Menge von Hypothesen $\Delta' \subseteq \Delta$.

   $\Longrightarrow$ Es gibt $n \geq 1$ mit $\Delta' \subseteq \Gamma_n$

   $\Longrightarrow$ $\Gamma_n \vdash \bot$, ↯ zu Γ_n konsistent. Also ist Δ konsistent.

2. Wir zeigen indirekt, daß Δ maximal konsistent ist. Sei also $\Sigma \supseteq \Delta$ konsistent. Angenommen, $\Sigma \neq \Delta$.

   $\Longrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Sigma \setminus \Delta$

   $\Longrightarrow$ $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \subseteq \Delta \cup \Sigma = \Sigma$ konsistent.

   $\Longrightarrow$ $\varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$, ein Widerspruch, d.h. Δ ist max. konsistent. $\square$

Lemma 1

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

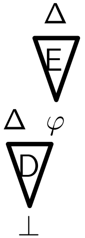
Beweis:

1. Zunächst zeigen wir indirekt, daß $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent ist:
   Angenommen, $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

   $\Longrightarrow \exists$ Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ und Konklusion $\bot$.

   $\Delta \vdash \varphi \Longrightarrow \exists$ Deduktion E mit Hypothesen in Δ und Konklusion φ.

   $\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion:



Also $\Delta \vdash \bot$, ein Widerspruch zur Konsistenz von Δ.
Also ist $\Delta \cup \{\varphi\}$ konsistent.

2. Da $\Delta \cup \{\varphi\} \supseteq \Delta$ konsistent und Δ maximal konsistent ist, folgt $\Delta = \Delta \cup \{\varphi\}$, d.h. $\varphi \in \Delta$. $\square$

Lemma 2

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt $\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$.

Beweis:

- Zunächst gelte $\neg\varphi \in \Delta$. Angenommen, $\varphi \in \Delta$. Dann haben wir die Deduktion

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}\,(\neg\mathrm{E})$$

und damit $\Delta \vdash \perp$, was der Konsistenz von Δ widerspricht.

- Gelte nun $\varphi \notin \Delta$.

  $\Longrightarrow \Delta \subsetneq \Delta \cup \{\varphi\} \Longrightarrow \Delta \cup \{\varphi\}$ inkonsistent (da Δ max. konsistent)

  $\Longrightarrow$ Es gibt Deduktion D mit Hypothesen in $\Delta \cup \{\varphi\}$ & Konklusion $\bot$.

  $\Longrightarrow$ Wir erhalten die folgende Deduktion:

$$\begin{array}{c} \cancel{\Delta \cup \{\varphi\}} \\ \nabla \\ \dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,(\neg \mathrm{I}) \end{array}$$

  $\Longrightarrow \Delta \vdash \neg\varphi \Longrightarrow \neg\varphi \in \Delta$ (nach Lemma 1) $\square$

Zusammenfassung 3. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Semantik von Formeln (semantische Folgerung, Tautologie, Erfüllbarkeit)
- Korrektheit des natürlichen Schließens, d.h.

  $$\text{syntaktische Folgerung} \Longrightarrow \text{semantische Folgerung}$$

- Teile des Beweises der Vollständigkeit des natürlichen Schließens, d.h. von

  $$\text{semantische Folgerung} \Longrightarrow \text{syntaktische Folgerung}$$

kommende Vorlesung

- maximal konsistente Mengen sind erfüllbar (damit Abschluß des Beweises der Vollständigkeit)
- diverse Folgerungen aus Korrektheit und Vollständigkeit