

Logik und Logikprogrammierung

6. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

Folie 4.9: Algorithmus für Frage, ob $\Delta \models \varphi$ gilt (für Δ endlich). Allerdings erfolgt Ausgabe „Ja“ immer erst nach exponentiell vielen Schritten.

Ziel: Verfahren, das schneller ist.

Idee

$$\Delta \models \varphi \text{ gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \text{ unerfüllbar gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \models \perp$$

→ wir benötigen Test, ob \perp aus Formelmenge Γ folgt

Der Resolutionskalkül stellt einen solchen Test für Mengen von „Klauseln“ (dies sind Formeln spezieller Form) dar.

Definition

Eine Formel λ ist ein **Literal**, wenn sie \perp , atomar, oder Negation einer atomaren Formel ist (z.B. \perp , p , $\neg p$, aber nicht $\neg\perp$).

Eine Formel φ ist eine **Klausel**, wenn sie Disjunktion von Literalen ist (z.B. $\neg p$, $p \vee \perp \vee \neg q$, $\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg q$).

Eine Konjunktion von Klauseln heißt **Formel in Konjunktiver Normalform** oder **in KNF**.

Schreibeweise

Für die Klausel $\varphi = \lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \dots \vee \lambda_n$ schreiben wir

$$\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \setminus \{\perp\}$$

Für eine Belegung \mathcal{B} sei $\mathcal{B}(\Phi) = \max(\{\mathcal{B}(\lambda) \mid \lambda \in \Phi\} \cup \{0\})$, so daß $\mathcal{B}(\Phi) = \mathcal{B}(\varphi)$ gilt.

insbes. \emptyset für \perp , die **leere Klausel**, hierfür auch \square

Für ein Literal $\lambda \neq \perp$ sei $\bar{\lambda}$ das folgende Literal:

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \neg p_i & \text{falls } \lambda = p_i \\ p_i & \text{falls } \lambda = \neg p_i \end{cases}$$

Seien Φ_1 , Φ_2 und Ψ Klauseln. Dann heißt Ψ **Resolvente** von Φ_1 und Φ_2 , falls es ein Literal $\lambda \neq \perp$ gibt mit $\lambda \in \Phi_1$, $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ und

$$\Psi = (\Phi_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}).$$

Sprechweise: Ψ wird aus Φ_1 , Φ_2 nach λ **resolviert**.

Beispiel

- $\{q, r\}$ ist Resolvente von $\{p, q\}$ und $\{\neg p, r\}$
- $\{q\}$ ist Resolvente von $\{p, q\}$ und $\{\neg p, q\}$
- \square ist Resolvente von $\{p\}$ und $\{\neg p\}$
- $\{p, \neg p\}$ ist Resolvente von $\{p, \neg p\}$ und $\{\neg p, p\}$
- $\{p, \neg p, r\}$ und $\{q, \neg q, r\}$ sind Resolventen von $\{p, \neg q, r\}$ und $\{\neg p, q\}$.

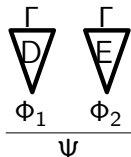
Definition

Sei Γ Klauselmengemenge und Ψ Klausel.

Ψ

ist **Resolutions-Ableitung** mit Hypothese Ψ und Konklusion Ψ .

Sind D und E Resolutions-Ableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ und ist Ψ eine Resolvente von Φ_1 und Φ_2 , so ergibt sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ und Konklusion Ψ :



Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$, wenn es eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion Ψ gibt. Wir sagen „ Ψ ist eine **Resolutions-Folgerung** von Γ “.

Eine **Resolutions-Refutation** ist eine Resolutionsableitung mit Konklusion \square .

Lemma

Es gibt einen Algorithmus, der für eine endliche Klauselmeng Γ und eine Klausel Ψ feststellt, ob $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ gilt.

Beweis: Seien

$$\text{Res}(\Gamma) = \Gamma \cup \left\{ \Psi \mid \frac{\Phi_1 \quad \Phi_2}{\Psi} \text{ für } \Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma \right\}$$

$$\text{Res}^0(\Gamma) = \Gamma$$

$$\text{Res}^{n+1}(\Gamma) = \text{Res}(\text{Res}^n(\Gamma) \cup \Gamma)$$

Γ endlich

\implies Menge V der in Γ vorkommenden atomaren Formeln ist endlich

$\implies |\text{Res}^n(\Gamma)| \leq 4^{|V|}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$\implies |\text{Res}^k(\Gamma)| = |\text{Res}^{k+1}(\Gamma)|$ f.a. $k \geq 4^{|V|}$.

Damit erhalten wir $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi \iff \exists k \in \mathbb{N}: \Psi \in \text{Res}^k(\Gamma)$
 $\iff \exists k \in \{0, 1, \dots, 4^{|V|}\}: \Psi \in \text{Res}^k(\Gamma)$

□

Lemma (Korrektheit der Resolution)

Sei Γ u.U. unendliche Klauselmengen und Ψ Klausel mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$.

Dann gilt $\Gamma \models \Psi$.

Insbes. ist Γ unerfüllbar, wenn Γ eine Resolutions-Refutation besitzt.

Beweis:

Per Induktion über den Aufbau der Resolutionsableitung:

I.A. Hat die Resolutionsableitung die Gestalt Ψ , so gilt $\Psi \in \Gamma$ und daher $\Gamma \models \Psi$.

I.S. Seien D und E Resolutionsableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ und sei Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 .
Dann existiert $\lambda \in \Phi_1$ mit $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ und $\Psi = (\Phi_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\})$.

Sei nun \mathcal{B} Belegung mit $\mathcal{B}(\Phi) = 1$ f.a. $\Phi \in \Gamma$. Nach I.V. gilt $\mathcal{B}(\Phi_1) = \mathcal{B}(\Phi_2) = 1$. Um $\mathcal{B}(\Psi) = 1$ zu zeigen, unterscheiden wir, ob $\mathcal{B}(\lambda) = 0$ oder $\mathcal{B}(\lambda) = 1$ gilt:

- $\mathcal{B}(\lambda) = 0$: Wegen $\lambda \in \Phi_1$ und $\mathcal{B}(\Phi_1) = 1$ existiert $\lambda' \in \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \subseteq \Psi$ mit $\mathcal{B}(\lambda') = 1$, also $\mathcal{B}(\Psi) = 1$
- $\mathcal{B}(\lambda) = 1$: Dann gilt $\mathcal{B}(\bar{\lambda}) = 0$, weiter analog □

Die Umkehrung des Lemmas gilt leider nicht, d.h. nicht alle semantisch folgenden Klauseln folgen auch mittels Resolution.

Beispiel

Es gilt $\emptyset \models \{p, \neg p\}$, denn jede Belegung erfüllt die Klausel $p \vee \neg p$.
Aber es gibt keine Resolutionsableitung mit Hypothesen in \emptyset , also gilt insbes. nicht $\emptyset \vdash_{\text{Res}} \{p, \neg p\}$.

Wir werden aber zeigen, daß die Umkehrung wenigstens für $\Psi = \square$ gilt, d.h. wir zeigen

Γ unerfüllbar $\implies \Gamma$ besitzt eine Resolutions-Refutation.

Lemma (Refutations-Vollständigkeit der Resolution)

Sei Γ endliche Klauselmenge mit $\Gamma \models \square$ (d.h. $\Gamma \models \perp$ bzw. Γ ist unerfüllbar). Dann gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, so daß höchstens die Atomformeln p_1, p_2, \dots, p_n in Γ verwendet werden (n existiert, da Γ endlich ist).

Wir zeigen Lemma per Induktion über n

I.A. gilt $n = 0$, so $\Gamma \subseteq \{\square\}$. Da Γ unerfüllbar ist, folgt $\{\square\} = \Gamma$ und damit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$.

I.S. sei jetzt $n \geq 1$. Dann sind

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{ \Phi \setminus \{p_n\} \mid \Phi \in \Gamma, \neg p_n \notin \Phi \} \text{ und} \\ \Gamma_1 &= \{ \Phi \setminus \{\neg p_n\} \mid \Phi \in \Gamma, p_n \notin \Phi \}\end{aligned}$$

Klauselmengen, die höchstens die Atomformeln p_1, \dots, p_{n-1} verwenden.

Behauptung 1 Γ_0 ist unerfüllbar.

Begründung: Angenommen, \mathcal{B} ist Belegung, die Γ_0 erfüllt, also $\mathcal{B}(\Phi \setminus \{p_n\}) = 1$ f.a. $\Phi \in \Gamma$ mit $\neg p_n \notin \Phi$.

o.B.d.A. $\mathcal{B}(p_n) = 0$ (da p_n in keiner Klausel aus Γ_0 vorkommt).

Sei $\Phi \in \Gamma$. Wir unterscheiden die Fälle $\neg p_n \in \Phi$ und $\neg p_n \notin \Phi$:

- $\neg p_n \in \Phi$: dann gilt $\mathcal{B}(\Phi) = 1$ wegen $\mathcal{B}(\neg p_n) = 1$
- $\neg p_n \notin \Phi$: $\mathcal{B}(\Phi) \geq \mathcal{B}(\Phi \setminus \{p_n\}) = 1$ wegen $\Phi \setminus \{p_n\} \in \Gamma_0$

Also ist Γ erfüllbar, im Widerspruch zur Annahme.

q.e.d.

Nach Induktionsannahme gilt also

$$\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \square \text{ und (analog) } \Gamma_1 \vdash_{\text{Res}} \square$$

Behauptung 2 Für alle Klausel Ψ mit $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \Psi$ gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ oder $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi \cup \{p_n\}$.

Begründung: per Induktion über die Resolutionsableitung $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \Psi$.

I.A. $\Psi \in \Gamma_0$. Nach Definition von Γ_0 gilt $\Psi \in \Gamma$ oder $\Psi \cup \{p_n\} \in \Gamma$, also $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ oder $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi \cup \{p_n\}$.

I.S. Es gibt Resolutionsableitungen von Φ_1 bzw. Φ_2 mit Hypothesen in Γ_0 , so daß Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 ist.

$\xrightarrow{\text{I.V.}}$ es gibt Klauseln Φ'_i mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi'_i$ und $\Phi_i \subseteq \Phi'_i \subseteq \Phi_i \cup \{p_n\}$

Ψ Resolvente von Φ_1 und Φ_2

\implies es gibt $\lambda \in \Phi_1$ mit $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ und $\Psi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}$.

insbes. $\lambda \in \Phi_1 \subseteq \Phi'_1$ und $\bar{\lambda} \in \Phi_2 \subseteq \Phi'_2$

$\implies \Psi' := \Phi'_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}$ ist Resolvente von Φ'_1 und Φ'_2 .

$\implies \Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi'$

Wir haben

$$\begin{aligned}\Psi &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \\ &\subseteq \Phi'_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \quad (= \Psi') \\ &\subseteq (\Phi_1 \cup \{p_n\}) \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \{p_n\}) \setminus \{\bar{\lambda}\} \\ &\subseteq (\Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}) \cup \{p_n\} \\ &= \Psi \cup \{p_n\},\end{aligned}$$

d.h. $\Psi' = \Psi$ oder $\Psi' = \Psi \cup \{p_n\}$

q.e.d.

Wegen $\Gamma_0 \vdash_{\text{Res}} \square$ haben wir also

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square \text{ oder } \Gamma \vdash_{\text{Res}} \{p_n\}$$

und analog

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square \text{ oder } \Gamma \vdash_{\text{Res}} \{\neg p_n\}$$

Da \square Resolvente von $\{p_n\}$ und $\{\neg p_n\}$ ist, gilt also in jedem Fall $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$, womit der induktive Beweis abgeschlossen ist. □

Satz (Korrektheit und Vollständigkeit der Resolutions-Refutation)

Sei Γ eine u.U. unendliche Klauselmengemenge Γ . Dann sind äquivalent:

- Γ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \perp$
- $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$

Beweis:

„ \uparrow “ Lemma auf Folie 6.7

„ \downarrow “ Sei Γ unerfüllbar

\implies es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich und unerfüllbar (Endlichkeitssatz)

$\implies \Gamma' \vdash_{\text{Res}} \square$ nach Lemma auf Folie 6.9

$\implies \Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$

\square

Wir haben also einen Test, der für eine Klauselmeng Γ feststellt, ob $\Gamma \models \perp$.

Sei nun Δ Klauselmeng und Φ mit $\Phi \setminus \{\perp\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ Klausel. Um $\Delta \models \Phi$ festzustellen, geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \Delta \models \Phi &\iff \Delta \models \bigvee_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\ &\iff \Delta \cup \underbrace{\left\{ \neg \bigvee_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right\}}_{\text{keine Klausel}} \models \perp \\ &\iff \Delta \cup \left\{ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bar{\lambda}_i \right\} \models \perp \\ &\iff \Delta \cup \{ \bar{\lambda}_i \mid 1 \leq i \leq n \} \models \perp \\ &\iff \Delta \cup \{ \bar{\lambda}_i \mid 1 \leq i \leq n \} \vdash_{\text{Res}} \square \end{aligned}$$

Folgerungstest für beliebige Formeln

Idee: Um zu testen, ob $\Gamma \models \perp$ gilt (vgl. Folie 6.2), wandeln wir Γ in Klauselmenge Γ' um, so daß $\Gamma \models \perp \iff \Gamma' \models \perp \iff \Gamma' \vdash_{\text{Res}} \square$.

Definition

Zwei Formeln α und β heißen **äquivalent** ($\alpha \equiv \beta$), wenn $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$ für alle passenden Belegungen \mathcal{B} gilt.

Für alle Formeln α und β ergibt sich

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \models \beta \text{ und } \{\beta\} \models \alpha$$

und damit nach dem Korrektheits- und Vollständigkeitssatz

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \vdash \beta \text{ und } \{\beta\} \vdash \alpha.$$

Satz

Für alle Formeln φ_1 , φ_2 und φ_3 gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$1) \quad \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$$

$$2) \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \\ \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

$$3) \quad \varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv \\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$$

$$4) \quad \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$$

$$5) \quad \varphi_1 \vee \varphi_1 \equiv \varphi_1$$

$$6) \quad (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2$$

$$7) \quad \neg\neg\varphi_1 \equiv \varphi_1$$

$$8) \quad \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1 \equiv \perp$$

$$9) \quad \varphi_1 \vee \neg\varphi_1 \equiv \neg\perp$$

$$10) \quad \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$$

Beweis: Wir zeigen nur die Äquivalenzen (3) und (4):

Sei \mathcal{B} beliebige Belegung, die zu $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ paßt.

Dazu betrachten wir die Wertetabelle:

$\mathcal{B}(\varphi_1)$	$\mathcal{B}(\varphi_2)$	$\mathcal{B}(\varphi_3)$	$\mathcal{B}(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	$\mathcal{B}((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Äquivalenz (4) gilt aufgrund der Deduktionen auf Folie 2.25. □

Aus dieser Liste von Äquivalenzen können weitere hergeleitet werden:

Beispiel

Für alle Formeln α und β gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Beweis:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \stackrel{(7)}{\equiv} \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \stackrel{(4)}{\equiv} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \stackrel{(7)}{\equiv} \neg\alpha \vee \neg\beta$$



Bemerkung

- Korrektheit (einfach): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen aus dieser Liste hergeleitete Äquivalenzen sind korrekt.
- Vollständigkeit (schwierig): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können alle korrekten Äquivalenzen hergeleitet werden.

Mit Hilfe der Äquivalenzen von Folie 6.16 kann zu jeder Formel α eine äquivalente Formel in KNF berechnet werden:

Beispiel:

$$\begin{aligned} & (AK \vee BK) \wedge (AK \rightarrow BK) \wedge (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK) \wedge RL \wedge \neg \neg AK \\ \equiv & (AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge (\neg(BK \wedge RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK \\ \equiv & (AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge ((\neg BK \vee \neg RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK \end{aligned}$$

und Formeln in KNF können als Klauselmengen aufgefaßt werden:

$$(AK \vee BK) \wedge (\neg AK \vee BK) \wedge ((\neg BK \vee \neg RL) \vee \neg AK) \wedge RL \wedge AK$$

entspricht der Klauselmenge

$$\{\{AK, BK\}, \{\neg AK \vee BK\}, \{\neg BK \vee \neg RL \vee \neg AK\}, \{RL\}, \{AK\}\}$$

Damit können wir tatsächlich eine beliebige Formelmenge Γ in eine Klauselmenge Γ' umwandeln:

- berechne für jede Formel $\gamma \in \Gamma$ die KNF
- betrachte diese KNF als Klauselmenge und bilde die Vereinigung Γ' all dieser Klauselmengen.

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Wir wollen

$$\{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

zeigen.

Dies ist äquivalent zu Unerfüllbarkeit der Formelmenge

$$\Gamma = \{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL, \neg \neg AK\}$$

Eine hierzu äquivalente Klauselmenge:

$$\Gamma' = \{\{AK, BK\}, \{\neg AK \vee BK\}, \{\neg BK \vee \neg RL \vee \neg AK\}, \{RL\}, \{AK\}\}$$

gefunden von logictools.org mit Build a clause normal form bei Eingabe von

$$(AK \vee BK) \ \& \ (AK \rightarrow BK) \ \& \ ((BK \ \& \ RL) \rightarrow \neg AK) \ \& \ RL \ \& \ \neg(\neg AK)$$

Es ergibt sich die folgende Resolutions-Refutation:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\{\neg AK, BK\} \quad \{AK\}}{\{BK\}} \quad \{\neg BK, \neg RL, \neg AK\}}{\{\neg RL, \neg AK\}} \quad \{AK\}}{\{\neg RL\}} \quad \{RL\}}{\square}
 \end{array}$$

gefunden von logictools.org mit Solve using Resolution: better showing html trace bei Eingabe der berechneten Formel in KNF

Daher ist Γ' (und somit Γ) unerfüllbar. Also haben wir erneut nachgewiesen, daß unter den genannten Bedingungen das Teil A heil ist.

Probleme:

- 1 Vollständigkeit: $\Gamma \models \Psi \implies \Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ gilt nur für $\Psi = \square$.
man kann zeigen (siehe Zusatzmaterial auf Folien 6.26 ff.): Sei Ψ Klausel, so daß für keine Atomformel p gilt $p, \neg p \in \Psi$. Dann gilt

$$\Gamma \models \Psi \iff \exists \Psi' \subseteq \Psi : \Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi' .$$

- 2 Laufzeit 1: Es gibt unerfüllbare endliche Klauselmengen, so daß jede Resolutions-Refutation exponentielle Größe hat; insbes. ist exponentielle Zeit nötig, um sie zu finden (Haken 1985).

5 Laufzeit 2:

$$(p_1^1 \wedge p_2^1) \vee (p_1^2 \wedge p_2^2) \equiv (p_1^1 \vee p_1^2) \wedge (p_1^1 \vee p_2^2) \wedge (p_2^1 \vee p_1^2) \wedge (p_2^1 \vee p_2^2)$$

allgemein:

$$\gamma = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (p_1^i \wedge p_2^i) \equiv \bigwedge_{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}} \bigvee_{1 \leq i \leq n} p_{f(i)}^i$$

Diese Formel in KNF ist exponentiell groß. Man kann zeigen, daß jede zu γ äquivalente Formel in KNF wenigstens 2^n viele Klauseln enthält. Die Berechnung der Klauselmengens Γ' aus $\Gamma = \{\gamma\}$ benötigt also exponentielle Zeit.

wir werden zeigen (Folie 8.2 ff.): man kann Formel γ' in KNF in polynomieller Zeit berechnen, die genau dann erfüllbar ist, wenn γ erfüllbar ist (was für unsere Zwecke ausreicht).

Zusammenfassung 6. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- weitere Methode, die Gültigkeit einer Folgerung zu entscheiden: die Resolution

kommende Vorlesung

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

Zusatzmaterial

Eine Klausel Ψ heißt **tautologisch**, wenn es eine Atomformel p gibt mit $p, \neg p \in \Psi$ (dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{B}(\Psi) = 1$ für alle Belegungen Ψ gilt).

Lemma

Seien Γ eine Klauselmengung und $\Psi = \{\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}\}$ eine nicht-tautologische Klausel. Sei weiter $\Gamma^+ = \Gamma \cup \{\{\lambda_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ und Φ eine Klausel mit $\Gamma^+ \models \Phi$. Dann

- gilt $\Phi \in \Gamma^+$ oder
- es existiert eine Klausel $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über die Größe der Resolutions-Ableitung $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \Phi$.

I.A. $\Phi \in \Gamma^+$. Dann gilt Behauptung des Lemmas trivialerweise.

I.S. Sei Φ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 mit $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \Phi_2$.

Dann existiert ein Literal λ mit $\lambda \in \Phi_1$, $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ und
 $\Phi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}$.

Für Φ_1 bestehen drei Möglichkeiten (analog für Φ_2):

- 1 $\Phi_1 \in \Gamma$
- 2 es gibt $1 \leq i \leq n$ mit $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$
- 3 $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Es ergeben sich 9 mögliche Kombinationen, die wir einzeln behandeln müssen.

Fall 1: $\Phi_1 \in \Gamma$.

Fall 1.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Setze $\Psi' = \emptyset$. Dann gelten

- $\{\Phi_1, \Phi_2\} \vdash_{\text{Res}} \Phi = \Phi \cup \Psi'$ und
- $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2$

woraus sich $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$ ergibt.

Fall 1.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Setze $\Psi' = \{\bar{\lambda}_j\} \subseteq \Psi$.

Wegen $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\bar{\lambda} = \lambda_j$ und daher $\bar{\lambda}_j = \lambda \in \Phi_1$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \emptyset\end{aligned}$$

und daher

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1 = \Phi \cup \{\lambda\} = \Phi \cup \{\bar{\lambda}_j\} = \Phi \cup \Psi'.$$

Fall 1.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi'_2 \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2$.

Setze $\Psi' = \Psi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \subseteq \Psi'_2 \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \cup \Psi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \Psi'_2) \setminus \{\bar{\lambda}\},\end{aligned}$$

d.h. $\Phi \cup \Psi'$ ist Resolvente von Φ_1 und $\Phi_2 \cup \Psi'_2$.

Aus $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2$ ergibt sich also $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Fall 2: $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fall 2.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.2

Fall 2.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Aus $\lambda \in \Phi_1$ und $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$.

Wegen $\lambda_i, \lambda_j \in \Psi$ ist Ψ also tautologisch, im Widerspruch zur Annahme.

Damit kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi'_2 \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2$.

Setze $\Psi' = \Psi'_2 \cup \{\bar{\lambda}\} = \Psi'_2 \cup \{\bar{\lambda}_i\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \cup \Psi'_2 \cup \{\bar{\lambda}\} \\ &= \emptyset \cup \Phi_2 \cup \Psi'_2 \text{ denn } \bar{\lambda} \in \Phi_2\end{aligned}$$

und damit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2 = \Phi \cup \Psi'$.

Fall 3: $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi'_1 \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1 \cup \Psi'_1$.

Fall 3.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.3

Fall 3.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dies ist symmetrisch zum Fall 2.2

Fall 3.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach der Induktionsannahme existiert $\Psi'_2 \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2$.

Setze $\Psi' = \Psi'_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Psi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \cup \Psi'_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Psi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\} \\ &= (\Phi_1 \cup \Psi'_1) \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \Psi'_2) \setminus \{\bar{\lambda}\}\end{aligned}$$

Also ist $\Phi \cup \Psi'$ Resolvente von $\Phi_1 \cup \Psi'_1$ und $\Phi_2 \cup \Psi'_2$.

Aus $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1 \cup \Psi'_1$ und $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi'_2$ folgt also $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$. □

Satz

Sei Γ Klauselmengende und Ψ nicht-tautologische Klausel mit $\Gamma \models \Psi$. Dann existiert $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi'$.

Beweis: Seien $\Psi = \{\bar{\lambda}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $\Gamma^+ = \Gamma \cup \{\{\lambda_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Wegen $\Gamma \models \Psi$ gilt $\Gamma \models \bigvee_{1 \leq i \leq n} \bar{\lambda}_i$.

$\implies \Gamma \cup \{\neg \bigvee_{1 \leq i \leq n} \bar{\lambda}_i\}$ unerfüllbar

$\implies \Gamma \cup \{\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \lambda_i\}$ unerfüllbar

$\implies \Gamma^+ := \Gamma \cup \{\{\lambda_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ unerfüllbar

Es gilt also $\Gamma^+ \models \square$. Aus der Refutations-Vollständigkeit der Resolution (Folie 6.9) ergibt sich $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \square$.

Mit $\Phi = \square$ ergibt das vorherige Lemma

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi' = \Psi'$$

für ein $\Psi' \subseteq \Psi$.

