Logik und Logikprogrammierung
7. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

Eingabe-Resolution

Resolutions-Ableitungen können sehr komplizierte Bäume sein, die Suche nach ihnen ist dementsprechend schwer.

Ziel: Beschränkung auf „einfache Ableitungen“

Definition

Eine Eingabe-Ableitung ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Knoten Blatt oder Vater eines Blattes ist (für ein Beispiel siehe Folie 6.22).

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Eingabe}} \Psi$ wenn es eine Eingabe-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion Ψ gibt.

Beispiel

Sei $\Gamma = \big\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\big\}$.

- Γ ist unerfüllbar, denn es gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Box$:

$$\dfrac{\dfrac{\{p, q\} \quad \{\neg p, q\}}{q} \qquad \dfrac{\{p, \neg q\} \quad \{\neg p, \neg q\}}{\neg q}}{\Box}$$

- es gilt jedoch nicht $\Gamma \vdash_{\text{Eingabe}} \Box$: es gibt keine Klauseln $\Phi \in \Gamma$ und Ψ, so daß $\Box$ Resolvente von Φ und Ψ ist.

Der Vollständigkeitssatz von Folie 6.13 gilt also nicht für Eingabe-Ableitungen.

Hornformeln (Alfred Horn, 1918–2001)

Beobachtung

- In vielen Situationen kann „Wissen“ als Regelmenge formalisiert werden. Typische Regeln sind
  - „wenn dies und dies und dies gilt, so gilt jenes“
  - bzw. „dies gilt“.
- Gefragt ist dann oft, ob „dies“ gilt.

Für solche Situationen werden wir zeigen, daß die Horn-Resolution (eine Verschärfung der Eingabe-Resolution) ausreicht.

Außerdem: Grundlage der logischen Programmierung.

Aus Alfred Horns Nachruf:
„... Horn clauses ... became important in the 1970s in computational logic... Professor Horn was amused to hear of this application for his research but he never owned a personal computer himself ... He believed all worthwhile information could most easily be obtained at the public library.“

Definition

Eine Hornklausel ist eine Formel α der Gestalt

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot \to r\,,$$

wobei $p_1, \dots, p_n$ atomare Formeln (also $\neq \bot$) und r atomare Formel oder $r = \bot$ sind.

Sie heißt

- positiv, definit oder Regel, wenn $r \neq \bot$,
- negativ, wenn $r = \bot$ und
- Fakt, wenn $n = 0$ und $r \neq \bot$

Bemerkung

Es gilt

$$\begin{aligned} p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot \to r &\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg\bot) \vee r \\ &\equiv \neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee \bot \vee r \\ &\hat{=} \{\neg p_1, \cdots, \neg p_n, r\} \end{aligned}$$

Daher erhalten wir: Eine Klausel Φ (d.h. endliche Menge von Literalen) ist

- Hornklausel, wenn höchstens ein Literal der Form p vorkommt,
- positive Hornklausel, wenn genau ein Literal der Form p vorkommt und
- negative Hornklausel, wenn kein Literal der Form p vorkommt.

Beobachtung

Sei Ψ eine Resolvente der Hornklauseln Φ_1 und Φ_2. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Ψ ist Hornklausel.
2. Φ_1 oder Φ_2 ist (oder beide sind) positiv.
3. Sind Φ_1 und Φ_2 positiv, so ist auch Ψ positiv.
4. Ist Φ_1 positiv und Φ_2 negativ (oder umgekehrt), so ist Ψ negativ.
5. Die leere Klausel $\Box$ ist eine negative Hornklausel.

Begründung:

Es gibt atomare Formel p mit (o.B.d.A.) $p \in \Phi_1$, $\neg p \in \Phi_2$ und $\Psi = \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}$.

1. ≤ 1 positives Literal in $\Phi_1 \implies$ kein positives Literal in $\Phi_1 \setminus \{p\}$
   ≤ 1 positives Literal in Φ_2
   $\implies \Psi$ enthält ≤ 1 positives Literal, ist also Hornklausel
2. klar wegen $p \in \Phi_1$
3. Φ_2 positiv
   $\implies q \in \Phi_2$ für eine atomare Formel q
   $\implies q \in \Psi$, d.h. Ψ ist positiv.
4. Φ_2 negativ
   $\implies$ alle Literale in Φ_2 sind negativ
   Da p einziges positives Literal in Φ_1 ist, enthält Ψ also keine positiven Literale, ist also negative Hornklausel.
5. Klausel $\Box$ enthält kein positives Literal, ist also negative Hornklausel. $\square$

Definition

Sei Γ Menge von Hornklauseln. Eine Horn-Ableitung ist eine Resolutions-Ableitung, in der keine positiven Resolventen auftreten.

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \Phi$, wenn es eine Horn-Ableitung gibt mit Hypothesen in Γ und Konklusion Φ.

Beobachtung

Da es keine Resolvente von zwei negativen Hornklauseln gibt, ist die allgemeine Form einer Horn-Ableitung also folgendermaßen, wobei die Hornklauseln Ψ_i negativ und die Hornklauseln Φ_i positiv sind (mit $\Psi_0, \Phi_i \in \Gamma$ für alle i):

$$\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Psi_0 \quad \Phi_0}{\Psi_1} \quad \Phi_1}{\Psi_2} \quad \Phi_2}{\Psi_3} \quad \Phi_3}{\Psi_4} \\ \qquad\qquad\qquad \ddots\end{array}$$

Daher ist jede Horn-Ableitung auch eine Eingabe-Ableitung.

Plan

Für Klauselmengen Γ gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box\,.$$

Wir wollen zeigen: Ist Γ Menge von Hornklauseln, so gilt sogar

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box\,.$$

Hierfür reicht es zu zeigen:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box\,.$$

Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist trivial, die komplizierte Implikation „$\Rightarrow$“ wird gezeigt, indem die Resolutions-Ableitung in eine Horn-Ableitung „umgebaut“ wird. Hierzu zunächst ein Beispiel.

Beispiel

Betrachte die folgende Resolutions-Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \qquad \dfrac{\{p\} \quad \{q, \neg p\}}{\{q\}}}{\{\neg p, \neg r\}} \qquad \{p, \neg q\}}{\{\neg r, \neg q\}} \qquad \{q, \neg r\}}{\{\neg r\}} \qquad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\square}$$

- alle Hypothesen sind Hornklauseln (und daher sind alle vorkommenden Klauseln Hornklauseln)
- die Konklusion ist $\square$
- es handelt sich um keine Horn-Ableitung, da die positive Hornklausel $\{q\}$ eine Resolvente ist.
- Mit der negativen Resolvente $\{\neg p, \neg r\}$ beginnt eine Horn-Ableitung.

Im ersten (problematischen) Teil der Resolutions-Ableitung

- werden zunächst die zwei positiven Hornklauseln $\{p\}$ und $\{q, \neg p\}$ zu $\{q\}$ „kombiniert“
- und dann deren „Kombination“ auf die negative Hornklausel $\{\neg q, \neg p, \neg r\}$ „angewandt“.
- Das Ergebnis ist $\{\neg p, \neg r\}$.

$$\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \qquad \dfrac{\{p\} \quad \{q, \neg p\}}{\{q\}}}{\{\neg p, \neg r\}}$$

Er wird „umgebaut“, indem

- die negative Hornklausel $\{\neg q, \neg p, \neg r\}$ nacheinander mit $\{q, \neg p\}$ und mit $\{p\}$ „kombiniere“ wird.
- Das Ergebnis ist $\{\neg r\}$, ist also kleiner geworden.

$$\dfrac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \{q, \neg p\}}{\{\neg p, \neg r\}} \qquad \{p\}}{\{\neg r\}}$$

Da das Ergebnis des 1. Teils durch den „Umbau“ verkleinert wurde, muß sich auch der 2. Teil ändern: Wir löschen all das, was „keinen Sinn mehr ergibt“:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\cancel{\neg p}, \neg r\} \quad \cancel{\{p, \neg q\}}}{\{\neg r, \cancel{\neg q}\}} \qquad \cancel{\{q, \neg r\}}}{\{\neg r\}} \qquad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\Box}$$

Damit haben wir die folgende Horn-Ableitung aus dem neuen Ergebnis $\{\neg r\}$ (ohne neue positive Hypothesen) mit Konklusion $\Box$:

$$\dfrac{\dfrac{\{\neg r\} \quad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\Box}$$

Zusammengenommen ergibt sich die folgende Horn-Ableitung ohne neue Hypothesen mit Konklusion $\square$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg q, \neg p, \neg r\} \quad \{q, \neg p\}}{\{\neg p, \neg r\}} \qquad \{p\}}{\{\neg r\}} \qquad \{r, \neg s\}}{\{\neg s\}} \qquad \{s\}}{\square}$$

Das folgende Lemma verallgemeinert das „Löschen“ im zweiten Teil:

Lemma

Seien Δ Menge positiver Hornklauseln und $\Psi^- \subseteq \Psi$ negative Hornklauseln. Dann gilt

$$\Delta \cup \{\Psi\} \vdash_{\text{Horn}} \Box \implies \Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

Beweis: induktiv über die Größe der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Delta \cup \{\Psi\}$.

- IA Die kleinstmögliche Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ hat die Hypothese $\Box$. Da $\Box$ negativ ist, folgt $\Psi = \Box$ und damit $\Psi^- = \Psi$, womit die Aussage $\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$ trivial wird.
- IS Betrachte den ersten Schritt in der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Delta \cup \{\Psi\}$: es gibt $\Phi \in \Delta$ und $p \in \Phi$ mit $\neg p \in \Psi$ und

$$\Delta \cup \left\{\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\}\right\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$$

Wir unterscheiden die Fälle $\neg p \in \Psi^-$ und $\neg p \notin \Psi^-$:
<u>1. Fall:</u> $\neg p \notin \Psi^-$. Dann gilt

$$\Psi^- \subseteq \Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\}\,,$$

nach IV folgt

$$\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box\,.$$

<u>2. Fall:</u> $\neg p \in \Psi^-$. Dann ist

$$\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi^- \setminus \{\neg p\} \subseteq \Phi \setminus \{p\} \cup \Psi \setminus \{\neg p\}$$

Resolvente von Φ und Ψ^-. Nach der IV folgt

$$\Delta \cup \big\{\Phi \setminus \{p\} \cup \Psi^- \setminus \{\neg p\}\big\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$$

und damit

$$\Delta \cup \{\Psi^-\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box\,.$$

$\Box$

Lemma

Für jede Menge Γ von Hornklauseln gilt

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box \implies \Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box \,.$$

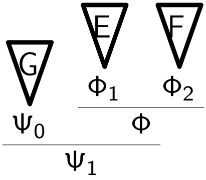
Beweis:
Für eine Resolutionsableitung D sei n_D die Anzahl positiver Resolventen in D, so daß D genau dann Horn-Ableitung ist, wenn $n_D = 0$.

Sei D eine Resolutions-Ableitung von $\Box$ mit Hypothesen aus Γ mit dem geringstmöglichen Wert n_D.

Gilt $n_D = 0$, so haben wir $\Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box$.

Angenommen $n_D > 0$. Dann existiert eine Resolutions-Ableitung D' der nebenstehenden Gestalt mit

- $n_D = n_{D'}$,
- Φ_1, Φ_2 und Φ sind positive Hornklauseln,
- Ψ_0 und Ψ_1 sind negative Hornklauseln und
- $\Delta \cup \{\Psi_1\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$, wobei $\Delta \subseteq \Gamma$ die Menge der positiven Hornklauseln aus Γ ist.



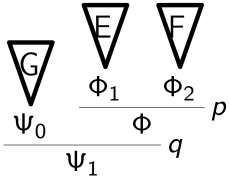
Wir werden die Resolutions-Ableitung D' vereinfachen (was das „Umbauen“ des 1. Teils der Resolutions-Ableitung verallgemeinert)

- Φ Resolvente von Φ_1 und Φ_2
  $\Longrightarrow$ es gibt $p \in \Phi_1$ mit $\neg p \in \Phi_2$ und $\Phi = \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}$.
- Ψ_1 Resolvente von Ψ_0 und Φ
  $\Longrightarrow$ es gibt $q \in \Phi$ mit $\neg q \in \Psi_0$ und $\Psi_1 = \Phi \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}$.

Wir haben

- $q \in \Phi_2$ und $\neg q \in \Psi_0$
- $p \in \Phi_1$ und $\neg p \in \Phi_2 \setminus \{q\}$ (da $\neg p \in \Phi_2$)

Erinnerung: D' ist die folgende Resolutions-Ableitung:



Daher ist das folgende eine Resolutions-Ableitung D'' (die weniger positive Resolventen enthält als D'):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_{E}\\ \Phi_1\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla_{F}\\ \Phi_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\nabla_{G}\\ \Psi_0\end{array}}{\Phi_2 \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}}\, q}{\underbrace{\Phi_1 \setminus \{p\} \cup \big(\Phi_2 \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\}\big) \setminus \{\neg p\}}_{=:\Psi_1^-}}\, p$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcl}
\Psi_1^- & = & \Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{q, \neg p\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q, \neg p\} \\
& = & \Phi_1 \setminus \{p, q\} \cup \Phi_2 \setminus \{q, \neg p\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q, \neg p\} \\
& & \qquad\qquad\qquad (\text{da } \Phi_1 \text{ Hornklausel und } p \in \Phi_1) \\
& \subseteq & \big(\Phi_1 \setminus \{p\} \cup \Phi_2 \setminus \{\neg p\}\big) \setminus \{q\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\} \\
& = & \Phi \setminus \{p\} \cup \Psi_0 \setminus \{\neg q\} = \Psi_1
\end{array}$$

Wegen $\Delta \cup \{\Psi_1\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$ und $\Psi_1^- \subseteq \Psi_1$ gilt $\Delta \cup \{\Psi_1^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$ nach dem Lemma auf Folie 7.15.

Wir haben also eine Resolutionsableitung D'' für $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi_1^-$ gefunden mit $n_{D''} < n_{D'} = n_D$ und es gilt $\Delta \cup \{\Psi_1^-\} \vdash_{\text{Horn}} \Box$.

Das Zusammensetzen dieser zwei Resolutions-Ableitungen ergibt eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ, Konklusion $\Box$ und $< n_D$ vielen positiven Resolventen, im Widerspruch zur Wahl von D. $\Box$

Satz

Sei Γ Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent

- Γ ist unerfüllbar.
- $\Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box$.

Beweis:

Angenommen, Γ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \Box$. Dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$. Aus dem eben bewiesenen Lemma erhalten wir $\Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box$

Gilt umgekehrt $\Gamma \vdash_{\mathrm{Horn}} \Box$, so folgt $\Gamma \vdash_{\mathrm{Res}} \Box$. Daher ist Γ unerfüllbar. $\Box$

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Ziel ist es, die folgende Folgerung zu zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

Lemma auf Folie 3.9: man muß Unerfüllbarkeit der folgenden Menge zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Dies ist keine Menge von Hornklauseln ☹!

Idee: ersetze BK durch $\neg BH$ in allen Formeln.

Ergebnis:

- Aus $AK \lor BK$ wird $\neg BH \lor AK \hat{=} \{\neg BH, AK\}$.
- Aus $AK \to BK$ wird $AK \to \neg BH \equiv \neg AK \lor \neg BH \hat{=} \{\neg AK, \neg BH\}$.
- Aus $BK \land RL \to \neg AK$ wird
  $\neg BH \land RL \to \neg AK \equiv BH \lor \neg RL \lor \neg AK \hat{=} \{\neg RL, \neg AK, BH\}$
- $RL \hat{=} \{RL\}$
- $\neg\neg AK \equiv AK \hat{=} \{AK\}$

Wir müssen also zeigen, daß die folgende Menge von Hornklauseln unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg BH, AK\}, \{\neg AK, \neg BH\}, \{\neg RL, \neg AK, BH\}, \{RL\}, \{AK\}\}$$

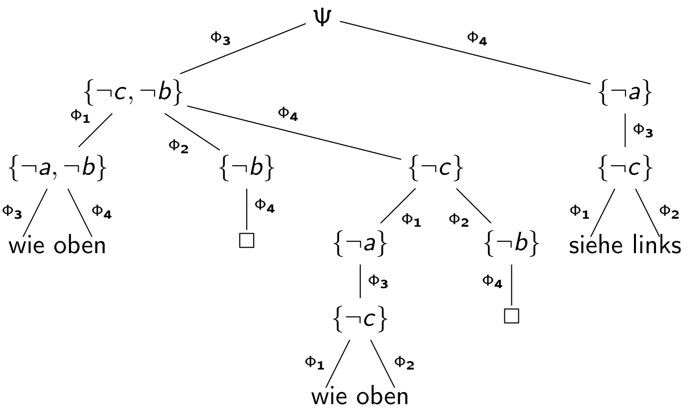
Dazu geben wir eine Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ an.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\neg AK, \neg BH\} \quad \{\neg RL, \neg AK, BH\}}{\{\neg AK, \neg RL\}} \qquad \{AK\}}{\{\neg RL\}} \qquad \{RL\}}{\Box}
$$

Beispiel

$$\Gamma = \{\underbrace{\{\neg a, \neg b\}}_{\Psi}, \underbrace{\{\neg a, c\}}_{\Phi_1}, \underbrace{\{\neg b, c\}}_{\Phi_2}, \underbrace{\{\neg c, a\}}_{\Phi_3}, \underbrace{\{b\}}_{\Phi_4}\}$$

alle Horn-Resolutionen aus Γ kann man durch einen Baum beschreiben:



Die Suche nach einer Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen:

- Breitensuche:
  - findet Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
  - hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe n kann es Niveaus der Größe 2^n geben)
- Tiefensuche:
  - geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe n hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
  - findet existierende Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ nicht immer (siehe Beispiel)

SLD-Resolution: spezielle Form der Tiefensuche:

- Hornklauseln werden nicht als Mengen $\{\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_m, q\}$, sondern als Tupel $(q, \neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_m)$ bzw. $(\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_m)$ (für $q = \bot$) aufgefaßt
- endliche Menge von Hornklauseln Γ ebenfalls als Tupel aufgefaßt $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$
- es wird immer Resolvente an erster möglicher Stelle der augenblicklichen negativen Hornklausel mit erster möglicher Eingabeklausel gebildet.

Dies führt zur logischen Programmiersprache PROLOG.

Zusammenfassung 7. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

kommende Vorlesung

- Tseitin-Konstruktion: schnelle Berechnung einer Formel γ' in KNF aus einer Formel γ, so daß γ' erfüllbar gdw. γ erfüllbar (verwendet für Anwendung der Resolution zur Entscheidung „Gilt $\Gamma \models \varphi$?“ bzw. „Ist Γ unerfüllbar?“)
- FRAGESTUNDE